几何学通论

秦元勋 著

JIHEXUETONGLUN



湖南科学技术出版社

封面设计：邹敏讷

统一书号：13204·31
定　价：0.40 元

几何学通论

秦元勋 著

湖南科学技术出版社

几何学通论

秦元勋著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1981年5月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：4.5　字数：95,000
印数：1——22,800
统一书号：13204·31　定价：0.40元

内 容 提 要

本书共分十章，从古代的几何学起，到现代的空时四元几何学止，均分章论述其发展简史，内容特点以及相互间的联系和区别。

全书通俗而严谨，可供初中以上程度读者阅读。

三 版 序 言

这本书原在1949年1月写于香港。当时由于伟大的社会主义新中国即将诞生，港九文化界在1949年元旦集会上号召用写作向新中国献礼，作者恭逢盛会，用一周时间写成这本书，交三联书店出版。第一版序言如下：

“在新中国里，学术不再是为少数的人，也不再被少数人所独占；而要使专门的学术大众化，在目前是学术工作者的最主要的任务。数学既然是一切科学的基础，使它大众化的需要当然更为迫切。

数学的几个大部门中，几何学有着图形的帮助，最容易引起广大的读者的兴趣。这本小册子的目的便是想用极简单的话和很美丽的图形向读者介绍几何学。只要念过一年几何和代数的人都看得懂这本书，而且在第九章里，我把最近代的几何学——连续几何学介绍给所有读者，希望没有念过几何学的人也看得懂它的大意，更希望对几何学有兴趣的人替它开拓更宽广的，更伟大的园地。”

十年过去后，由于广大读者的需要，作了部分修订，1959年由商务印书馆出修订版，再版的自序中有这样一段话：

“伟大的十年过去了，我们伟大的祖国已经起了空前的变化，一日千里地向社会主义和共产主义跃进。生活在这个伟大的祖国怀抱中的人，对于建国十周年的盛大时节如何能不表现出更大的欢欣。”作者用这段话表达了修订时的激情。

三十年过去了。我们的党提出向四个现代化进军的伟大任

务，号召提高全民族的科学文化水平。许多同志都催促我再版这本书，趁此机会我改写了部分章节，特别是重写了第十章“空时四元几何学”，这是二十世纪科学最伟大的成就之一，必须普及给广大读者。

湖南科技出版社为我提供了出版机会，并作了许多编辑加工、缮写等方面的工作，为第三版的出版付出了很大的劳动，谨致谢意。

最后，对从第一版起就支持这一工作的冯敏同志，表示谢意。

秦元勋

1980年3月于北京

目　　录

第一章　古代的几何学

I　几何学的发源

我们伟大的祖国在历史上对世界文化和科学的各个方面都有重大的贡献。由于农业劳动的需要，我国古代人民已经有了简单的几何图形的概念，例如，从甲骨文中已经出现了“规”与“矩”这两个字，也出现了“田”字。在殷周两代遗下的青铜器上面的花纹，都是十分美丽而准确的几何图案。“墨子”一书中对于圆所下的定义比西方欧几里德的“几何学要义”一书所记的要早一百多年。由于天文、水利、建筑等的需要，我国古代的几何学得到很大发展。大约在公元前一世纪，我国的“周髀算经”和“九章算术”都记载了“勾股弦”定理，其中如商高所称的“勾三股四弦五”，其后刘徽利用这个定理创造了“割圆术”，由圆内接正六边形分割到圆内接九十六边形，求出 $\pi=3.14$ 的近似值。这里已经有了逼近的概念。公元五世纪我国出了一位伟大的科学家——祖冲之，他算出圆周率 π 在 3.1415926 和 3.1415927之间，这一贡献比西方奥托的结果约早一千年。在天文和大地测量方面，我国古代还出了张衡和一行等伟大的科学家。

在西方，相传几何学是在四千年以前发源于埃及。埃及的尼罗河两岸土地肥沃、农产丰富，因此埃及成为西方文化的发祥地。但是，尼罗河每年有定期的泛滥，水涨时两岸田地被淹

没，水退后，田地的界限被冲毁。为了解决土地的争执，测地学便随着这种需要而发生。

上述的这种传说是有一定的可靠性的，因为现在我们所用的"几何学"这一名词的原意便是由西方的"测地学"音译过来的。约在三千八百年前，一位埃及学者阿默斯手抄了一本书，在这本有名的阿默斯抄本中便有许多关于面积的测量计算法。其中也还有关于金字塔的几何问题，直到现在对于金字塔的几何形体的精确与完美，人们仍不能不叹服，但可惜这些巨大的建筑只是作为帝王的墓地，徒然劳民伤财。

四季的变化对于畜牧业和农业都有决定性的意义，天文学也应时而生。首先必须要测定东西南北方向，古代人很早就知道用北极星来定北方，要找东西方向，则需要作南北方向的垂线，古代人用"勾三股四弦五"的办法来确定直角，也就是用三条绳子，各长三、四、五个单位，将它们组成一个三角形，则五单位所对的角便是直角。这个定理的一般形式，出现在希腊的毕达哥拉斯学派的工作中。一般说来，古代埃及的几何学只是从实际问题中积累了感性知识，还有待总结和提升并抽象出普遍性的定理和建立严格的体系。

II 希腊的几何学

希腊的"七个聪明人"之一的泰勒斯到埃及去经商，很快他就掌握了埃及人已有的几何学知识，并把这些知识传回到希腊。那时几何学不但是一门时髦的学科，而且是一切学者的必修科。哲学家柏拉图便在门上写着："不学几何学的人，请勿入此门"，因为几何学在当时被认为是训练人的思维方法和逻辑推理的最好的一门学科。希腊最伟大的几何学家是毕达哥拉斯。

1 毕达哥拉斯学派

毕达哥拉斯学派是一个组织非常严密的集团，他们将他们的成果保密起来。传说当他们发现了现在通称的"毕达哥拉斯定理"时，他们杀了一百头牛举行了盛大的祝贺大会。而当有一个人泄漏了这个秘密时，他们就将这个人溺死。这个有名的"毕达哥拉斯定理"是：

平面上一个直角三角形的直角的两夹边的平方之和等于直角所对的边的平方(图 1)

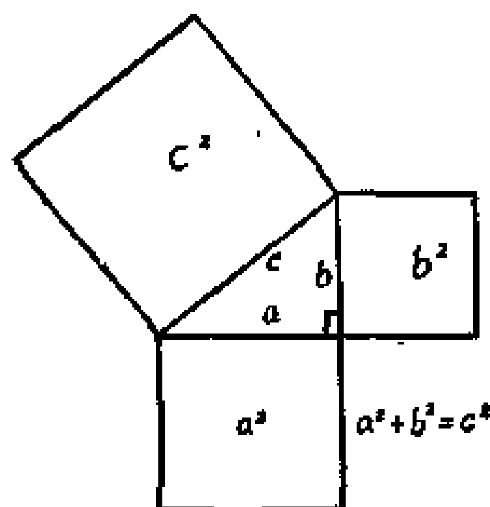


图 1

2 诡辩学派

与毕达哥拉斯学派同时的有著名的诡辩学派。这一派的领袖是辩证学家齐诺。最有名的诡辩例子是"追龟说"。希腊神话中有一个跑得最快的阿其里斯，但是齐诺断言，阿其里斯追不上一个比他跑得慢的乌龟。下面是齐诺的推理：

假设阿其里斯跑得比乌龟快十倍，他开始时在乌龟之后一丈远。当他跑完这一丈路时，这个乌龟前进了一尺。所以乌龟在阿其里斯前一尺。当他跑完这一尺路时，这个乌龟前进了一寸。所以乌龟在阿其里斯前一寸……如此下去，乌龟总在阿其里斯前面，永远追不上。

这里牵涉到阿其里斯和乌龟的速度是否固定的问题，速度固定后又有一个无限级数求和的问题。

诡辩学派研究的重要对象是几何学的作图难题。这些难题

中有曾经成为历史上著名问题而后来又都得到了彻底解决的所谓“三大难题”。

3　初等几何作图三大难题

希腊人留下的三大难题是：

（一）三等分任意一个已知角。

（二）二倍立方体，即作一个立方体使其体积等于一个已知立方体的体积的两倍。

（三）方圆，即作一个正方形使其面积等于一已知圆的面积。

历史上有不少学者为了这三个题目花了很多时间，直到十九世纪末才弄清楚了下面的结论：

如果作图的工具只限于圆规和无刻度的直尺，则这三个作图题都是不可能的（见第二章第II节4款和第四章第I节5款）。所谓不可能的准切意义和证明后面都将再谈到。

如果作图的工具不限于圆规和直尺，这三个问题都很容易解决。例如其中最困难的方圆问题，作一个圆柱，柱底为已给的圆，柱高为已给的圆的半径的一半，把这个圆柱在平面上滚一周，得到一个长方形（如图2）不难看出，这个长方形的一边是圆半径r的一半即$\frac{r}{2}$，另一边是圆周长即$2\pi r$，因此这个长方形的面积是

$$\frac{r}{2}\times 2\pi r=\pi r^2.$$

这就是圆面积。现在将长方形转化为正方形，作图法在每本初等几何书中都可以找到．问题也就解决了。由此可见，读者千万不要再去从事这种已经彻底解决了的问题的研究，否则既浪

费自己的宝贵时间，又给数学家增加完全无用的负担。



图 2

4 柏拉图学派

柏拉图对于几何学的贡献是在几何学的体系和基础方面。他开始把几何学建立在定义、公理及逻辑上面，使得几何学的基础比其他科学更稳固，论证更精密，体系更明确。但是他没有专心于几何学，所以著作不多，他的工作后来由欧几里德去完成。

柏拉图学派的研究偏重于立体几何学。这个学派的有名学者尤多苏。他证明了一个圆锥形的体积等于同高同底的圆柱形的体积的三分之一（图3）。他所用的方法叫耗尽法，实际上是积分法的粗型。

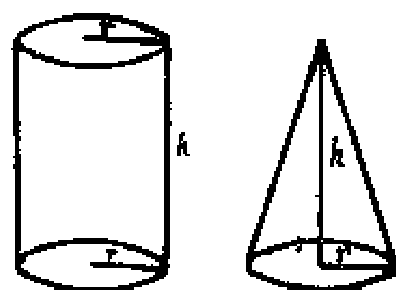


图 3

公元前338年，雅典被希腊北部的马其顿王斐力仆所征服。希腊文化从此中落，在希腊，几何学的发展也随着停滞。西方文化中心又移回到埃及去。在那里，初等几何学发展到了高峰，

第二章　欧氏几何学

I　亚力山大大学城

希腊被马其顿灭亡以后，其本土的文化因此中断。但斐力仆的儿子亚力山大大帝却把希腊文化向他的广大的征服区传播。他侵占埃及以后，便在尼罗河口建立了亚力山大城和亚力山大大学。这个大学继承了希腊文化的正宗，并向前发展了一千多年。这个大学早期出了几个著名的数学家和物理学家如阿基米德，阿波罗纽斯和欧几里德，晚期还出了巴布士。他们当中，以欧几里德对于几何学的贡献最大。

II　欧几里德的贡献

欧几里德为了教学的需要编成了一部"几何学要义"。这部书共分十五卷，第一、二、三、四、六卷都是关于平面几何的。第五卷是关于一般的比例图形。第七、八、九卷是关于算术方面的。第十卷是关于直线上的点。最后五卷则是关于立体几何的。这部书的材料虽然大部分是前人留下来的，证题方法也多沿用希腊人的，但欧几里德不仅增加了自己的工作，最主要的是建立了严格的几何的体系．他把以前不严格的证明重加论证，再经过一番非常精细的整理和排列。他整理出的这一套几何体系在几何学中占据了统治的地位达二千多年，那时欧几里德的名字可以说是几何学的同义语。只有到了十九世纪，才有其他

派别的几何学出现，于是，人们采用欧氏几何和非欧几何这样的名词来加以区分，这将在下一章去谈到。现在我们中学教的都是欧氏几何，因此，应该谈一谈欧氏几何的体系和内容。

1　几何学要义的体系

几何学要义这部权威著作的精华在什么地方呢？当然，其中的材料非常丰富和美丽，学过几何学的人都是知道的。但是丰富和美丽的材料不一定就会堆成一部好书。多而且好的衣料要能做成一件好衣服，还要经过好裁缝师傅的巧手剪裁与精心缝合才行。欧几里德便是几何学史上的“好裁缝”，他的剪裁缝合便构成了几何学的体系问题。

欧氏的书中包括四种根本性的概念：

第一、定义，即是几何学中用的字的意义。例如：

定义　一点只有位置而没有大小，并且不能被分割。

第二、公理，即是不证自明的命题。例如：

公理　如果A等于B，则B等于A。

第三、公设，即在几何学中假设其成立的事项，这种假设必须大家承认，才可以在它上面建立起几何学体系来。例如：

公设　过不同的二点可以作一直线。

第四、命题，命题又分两部份：

1）作图题，由已知的几何学里的对象找出或作出所求的对象。例如：

作图题：求作一已知角的二等分角线。

2）定理，即根据假定、公理、公设和定义利用逻辑推理得出结论。例如：

定理：一三角形的三边如相等，则三角亦相等。

2 定　　义

将实践中大量出现的事物的形态及其相互关系的这一侧面抽象出来，得出一类基本研究的对象，例如点、线、面、体等等。

3　公理、公设和定理

公理和公设的区别在哪里呢？欧氏的意思是：前者是数学各分支都承认的基本道理，后者则只是几何学中所需要的基本道理。不承认前者，整个数学体系都将产生变化，不承认后者，只牵涉到几何学的体系。现代学者已不再将它们区分，而统称为公理了。

定理是在公理、公设等的基础上，从假设出发，经过逻辑推理得出的结论。但是在推导中人们常常把未经列为公理、公设的一些道理不自觉地运用了。要把这些不自觉地用到的公理和公设全部补出，这个工作很困难，它是近百年来才解决的，以后第七章会再谈到。

当然，如果对于某一公理或公设不予承认，而换成另外的公理或公设，那么在它上面建立起的几何体系便将改观。例如欧氏几何中有一条著名的第五公设，即平行线公设如果改为其他的公设，则欧氏几何便将改换为非欧几何了，这将在下一章详谈。

4　欧氏作图法

欧氏几何学中规定只用两种作图工具，即圆规和无刻度的直尺。规定直尺只有两种用途：

1）经过已知不同的两点作一直线；

2）无限地延长一已知直线。

这里必须说明，欧氏的尺子上面没有刻度，故不能用作量长度的工具。

规定圆规只有一个用法：

已知O点及A点，以O为圆心，以OA为半径可作一个圆。

这里必须指出，普通如果知道了圆心在O，半径等于AB之长，则只要将圆规量了AB之长，再放到O点即可画圆，但欧氏圆规原来没有这个用法。对于喜欢钻研的读者，不妨试试，用欧氏圆规与直尺，作出圆心在O，半径等于AB长度的圆。

还有一点要加以限制，即是关于圆规和直尺使用的次数必须是有限次，不能用无限多次。合乎上面这些条件的作图法叫做欧氏作图法。前章所提到的所谓“初等几何学中作图三大难题”，利用欧氏作图法都是不可能的，这理由在后面第四章第I节5款会谈到。

当然，没有理由限制作图只能使用欧氏直尺与欧氏圆规，有创造性的人可以创造各种作图工具，用以解决各种问题，开辟新的作图园地，这是另一个问题了。

III 圆锥截线

与欧氏差不多同时的有著名的学者阿基米德，他是数理物理学的创始者，流体静力学的基本原理——浮力原理的发现者。在几何学上阿基米德的贡献也很大。他在巨著“圆的度量”和“球与圆柱”中大胆地用了极限的方法去研究长度、面积和体积的关系，这种方法在当时被正统的希腊学派的学者所难于接受，但是这种思想在后来微积分发明之后便被普遍推广和采用了。

当罗马军队打破他所在的城市时，他正在沙地上专心地研

究他的圆．他痛斥罗马士兵无理地踏坏了他的图形，因而被罗马士兵杀死．虽然罗马的将军马塞禄曾下过命令不许伤害这个杰出的学者，但也无济于事。依照他的遗嘱，马塞禄在他的墓碑上刻下了一个装在圆柱里面的球形，用以记述他的一个著名定理：

“一个球的体积与面积各为一个刚好包围这个球的圆柱的体积与面积的三分之二”（见图4）

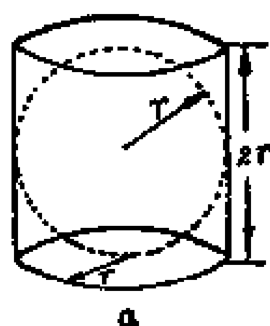


图 4

阿基米德死后半个世纪出了杰出的几何学家阿波罗纽斯。他利用欧氏方法去研究圆锥截线，因此也属于欧氏几何学范围。他的结果非常精美，但是后来居上的其他几何学的方法给我们更简便的途径去进行研究，这在第四章及第五章再谈到．现在只给出定义：

取二根相交的直线 AOA' 及 BOB'，将 BOB' 绕 AOA' 轴旋转所得曲面称为圆锥曲面（图5）

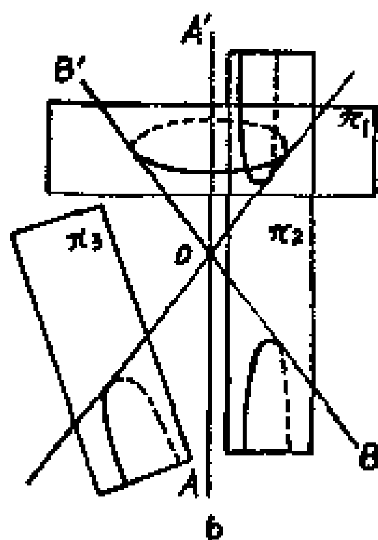


图 5

任取一张平面与圆锥曲面相截，得到的曲线称为圆锥截线。圆锥截线可分为三大类：

1）椭圆，包括圆及一点等特例（图6）

2）双曲线，包括二相交直线及重合的二直线等（图7）

3）抛物线（图8）

这三种圆锥截线都有正规的作法。在一平面（π_1）上任取两点 P 与 Q，在（π_1）上找点 R，使得 $|PR|+|QR|=$ 已给定的常量。这种 R 点的全体便组成一个椭圆（图9）。在一个平面（π_2）

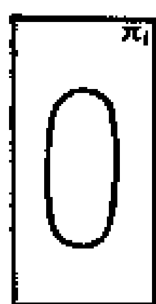


图 6

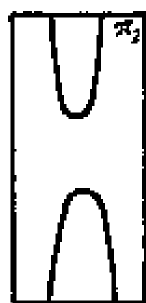


图 7

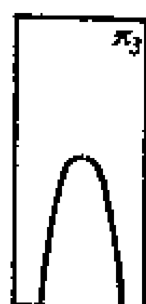


图 8

上任取两点P与Q，在（π_2）上找点S，使得$||PS|-|QS||=$已给的常量.这种S点的全体便组成一个双曲线（图10）。在一个平面（π_3）上任取一直线l及线外一点P。在（π_3）上找点T，使得T点到l的距离等于T点到P点的距离，这种T点的全体便组成一个抛物线（图11）。

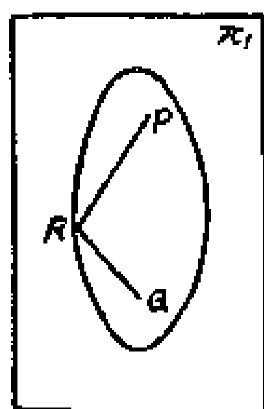


图 9

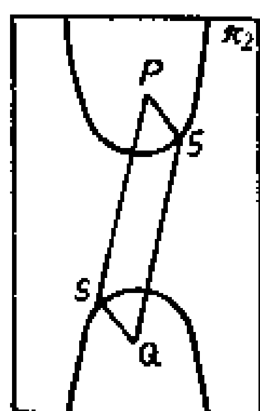


图10

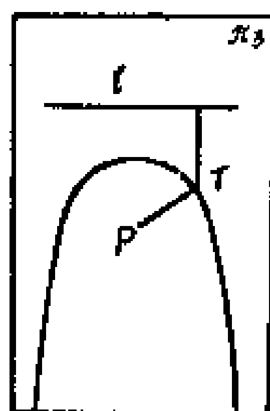


图11

有一个简单的作法，取一个手电筒，正对着墙上一照便得到一个圆；倾斜一些，圆变成椭圆；再倾斜一些，椭圆拉长成抛物线；再倾斜一些，抛物线便成了双曲线的一支。

圆锥截线在工程技术中应用很广。双曲线可以用作飞机舰艇导航的根据。椭圆是地球绕太阳，卫星绕地球的轨线。炮弹是沿抛物线运动的等等。因此应当将圆锥截线的知识作为常识

来普及。在第四章I节6款和第五章第IV节2款还会再提到圆锥截线。

关于亚力山大大学中最后的一个杰出学者巴布士的工作将在第四章第I节3款和第五章第IV节1款中述及。

在此以后，黑暗的中世纪统治了西方，几何学的发展停滞了一千多年。

第三章 非欧几何学

I 非欧几何学小史

在欧氏几何学在几何学中占统治地位的二千多年中，许多几何学家都企图将欧氏平行公设改为一个定理，亦即用其他公理和公设为基础来推出这一公设。长期的许多人的努力都归于失败，敢于思考的人开始怀疑。十九世纪初叶，三个数学家——俄国的罗巴切夫斯基、匈牙利的波尔雅和德国的高斯互相独立地发展了一种几何学，简称双曲式几何学。由于罗氏最先发表，所以又叫罗氏几何学。他们三人的情况各不相同。波尔雅是一个青年学生，他的成果是作为他父亲的一本著作的附录发表的。但是，老波尔雅的那本书早已被人遗忘，而这个青年在附录中所表述的思想则已永远留下来了。当波尔雅的成果送到被称为"数学的王子"的大科学家高斯的手中时，高斯说，同样的工作高斯本人也已作了，但是，不敢发表，因为怕被人骂成"疯子"。要想改变统治几何学界两千多年的欧氏几何学，那的确是几何学中的一场思想革命。这场革命在远离西方文化中心的俄国卡山开始了。罗巴切夫斯基任过卡山大学校长。1826年他发表了自称为"虚几何学"的论文，算是对欧氏几何学的革命宣言，以此欧几里德不再是几何学的同义语，欧氏几何只是几何中的一个派别，虽然是非常重要的派别。历史的教训是值得吸取的：远离西方文化中心的卡山，也少受传统的压力；初生的牛犊不怕老虎；而天才的大师却可能畏惧社会保守势力的攻击，不仅

不支持新生事物，甚至隐藏起自己已经取得的科学成果。

历史又到了迅速发展的阶段。当罗氏巨著发表的那一年，一位有重大贡献的数学家黎曼在德国诞生了。二十八年后，年青的黎曼提出了又一种新的几何学，它既不是欧氏几何学，也不是罗氏几何学，现在通称为黎氏几何学，或椭圆式几何学。罗氏和黎氏几何学又合称为非欧几何学。以后由于射影几何和微分几何的发展，这三种几何学又可以从更高级的观点统一起来，这在第五章第IX节3款和第六章第III节3款中将再述及。

II 三种几何学公设的异同

现在我们先叙述欧氏的平行公设，再看罗氏和黎氏如何改变它。

1 欧氏及罗氏的平行公设

欧氏平行公设如下：

在一平面上，设有一直线a及线外一点B，过B可以作一直线b不与a相交；并且通过B点不与a相交的直线只有一条b(图12a)

定义 直线b叫直线a的平行线。

罗氏用下面的公设代替了欧氏的平行公设：

罗氏平行公设：在一平面上，通过一直线a外面一点B，可以作a的两条不同的平行线b_1及b_2(图12b)

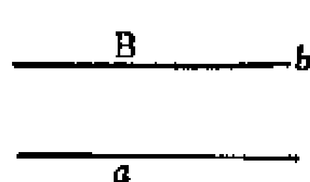


图12 a

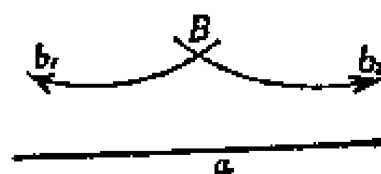


图12 b

2 黎氏公设

黎氏根本不承认有平行线的存在，而代之以黎曼的两条公设

1) 同一平面上的任何二直线一定相交

2) 直线虽可以无限延长，但是总的长度是有限制的。

人们很难想象黎氏几何学说的是什么，但是幸好我们是生活在地球上，地球上的“直线”实际上是过地球中心的平面所截出的大圆。大圆必相交，大圆的长度是有限的，虽然沿着大圆可以不断前进。

用一个简单的方法来说明这三种公设的不同点：取一条直线AOA'及线外一点B，联结BO，让O点沿OA方向跑到无限远处去时，BO的极限位置设为BX；再让O点沿OA'方向跑到无限远处去，BO的极限位置设为BX'（图13）

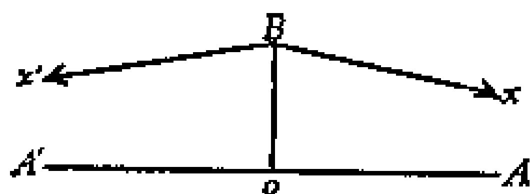


图13

如果BX与BX'系同一直线的二线段时，便得到欧氏公设；如果BX与BX'不是同一直线的二线段，便得到罗氏公设；如果O点沿OA或OA'的方向跑去后经过有限的路程又跑回原地，便是黎氏公设。

III 三种几何学的异同

三种几何学的基本差异只限于平行公设，因此，凡与平行

公设无关的欧氏几何学的定理，在三种几何学中都是成立的。凡与平行公设有关的欧氏几何学的定理在另外两种几何学中都要修改，重新建立。

1　三种几何学中相同的定理

下面略述三种几何学中都成立的几条定理：

例一　假设两个三角形的三对对应边皆各各相等，则两三角形可以叠合。

例二　假设两个三角形的二对对应边及对应的夹角皆各各相等，则两三角形可以叠合。

例三　假设两个三角形的二对对应角及对应的夹边皆各各相等，则两三角形可以叠合。

例四　一个三角形的两边相等，则两对应角可以叠合。

这里不用“全同”或“相等”而用“叠合”，这是为了加重叠合的意义，在第八章第II节4款中，我们会看到这三种几何学如何在叠合的意义下统一起来，其他相同的例子很多，此地不多述，而转到相异的方面去。

2　三种几何学中不同的定理

这三种几何学的最显著的差异在于角和面积方面。举几个主要例子：

例一　欧氏：任何一个三角形的三内角之和等于二直角。

罗氏：任何一个三角形的三内角之和小于二直角。

黎氏：任何一个三角形的三内角之和大于二直角。

由此，又引入了定义：

在罗氏几何中，二直角减去一个三角形的三内角之和叫做该三角形的“角欠”。

在黎氏几何中，一个三角形的三内角之和减去二直角叫做该三角形的“角余”。

例二 欧氏：一个三角形的面积与三内角之和无关。

罗氏：一个三角形的面积与角欠成正比。

黎氏：一个三角形的面积与角余成正比。

例三 欧氏：两个三角形的三对对应角各各相等，则两三角形的三对对应边成比例，但不一定相等，因而也不一定能叠合。

罗氏与黎氏：两个三角形的三对对应角各各相等，则两三角形的三对对应边各各相等，且此两个三角形可以叠合。

由此可见，罗氏和黎氏几何学中的三角学的问题比较容易阐述：

一个三角形有三个边及三个角共六个要素，已知三个求其他三个，便是三角学的问题。

欧氏几何学则不容易叙述一些。因为这六个要素中，三内角之和为二直角，因此，如果给出三个角，则三角形并未完全确定，只得出三边的比例关系，并不完全确定。因此应得到：

欧氏：一个三角形有三个边及二个角共五个要素，第三个角是二直角减这二个角之和，故不是独立的。在五个要素中，给出三个，要求其他两个，这便是欧氏三角学。

由上面的例子可以看出三种几何学主要不同的结论了。

IV 三种几何学与真理的问题

读者也许会问，真理只有一个，为什么会出现三种不同的几何学呢？检验真理的标准只能是实践，实践证明那一种几何学是真理呢？

原来，客观事物是复杂多样的，随着不同的客观条件，我们得到不同的规律。

例如，在日常小范围空间的条件下，例如一个房屋的建设，或一个城市的规划，用欧氏几何便足够精确了。但是，如果你要作远距离的旅行，例如由北京到上海，在地球上北京与上海的最短距离已经不再是直线（除非你打一个穿过地球的地洞），而是通过地球中心和北京、上海三点所决定的平面与地球所交的大圆上由北京到上海的一段劣弧，地球上的球面三角学这已是黎氏几何学了。例如用经线0°及180°的子午平面，经东经线90°及西经线90°的子午平面和纬度0度的赤道平面这三张平面将地球表面分为八个球面三角形，你就可以看出，这每个球面三角形的三内角都是直角。因此，这每个球面三角形的三内角之和均为270°，而不再是180°。角余都是90°而不再是0°，由此可见，在地球表面的大范围地区，我们实际上要用黎氏几何学。

那么，罗氏几何学又将在什么条件下出现呢？一个情形是在“伪球”上（见第六章第III节2款）。那么在物理世界中，罗氏几何出现吗？的确如此！罗巴切夫斯基曾经设想他的“虚几何学”可能在天文学的大尺度上有实现的可能，虽然在他生活的年代上，科学发展水平还来不及给以验证。这种思想在爱因斯坦的相对论出现之后，在物理世界大尺度重质量的恒星的周围的空间与时间中出现了这种几何学所描述的特征，这将在第十章中第II节5款中述及。

总之，从逻辑上，三种几何有同样的地位；从数学的实现上，三种几何都有模型可以实现；从物理世界的现实中，三种几何各在一定的条件下成为现实世界的一种理论的近似“模写”。因此，都是一定条件下的相对真理，而又都可以在更高一级的观点上统一起来。

本章里所提到的研究非欧几何的方法是初等的，后面还要用高级的观点来处理它们，我们必须跳出初等方法的范围，找出新的工具来开拓几何学的新研究领域。

第四章 解析几何学

I 解析几何学的基本概念

解析几何学的发明是法国大哲学家笛卡儿等人的贡献，它在代数学与几何学之间建起一个桥梁。几何学的问题先翻译成了代数学的问题，用代数学的方法解决；所得的结果再翻译成几何学所要的答案，因此在本章里，我得假定读者已经念过初等代数学才行。

1 直线上的点与实数的对应

假设有一架飞机沿东西方向的直线飞行，机师经常用无线电与地面联络，报告飞机的位置。在航路中任取一点O，机师可以报告飞机的位置如次：

在O点东若干里，

在O点，

在O点西若干里。

但是为了节省电文的缘故，他与地面上的人约定用一个正号“+”代表“在O点东……里”，用一个零“0”代表“在O点”，用一个负号“-”代表“在O点西……里”。例如飞机正在O点，机师的电文便是“0”，地面上的人收到“0”之后，又再翻译成“在O点”。例如飞机在O点西2.5里，机师的电文便是“-2.5”，地面上的人收到“-2.5”后再翻译成“在O点西2.5里”。这里有两点必须注意的：第一，机师先把位置翻译成一个数目，每一个位置只能

翻成一个数目，不会翻成两个不相等的数目。第二，地面上的人收到一个数目时也只能翻译成一个位置，不会翻出两个不同的位置。这样电文便不会引起误解，用数学的话来说，这航线上的每一点必定找得出一个实数（包括正数、负数和零）来表示；也只找得到一个实数来表示。反过来说，任何一个实数必定能表示这航线上的一点，也只能表示这航线上的一点。所以航线上的点与实数便一对一地配成对。

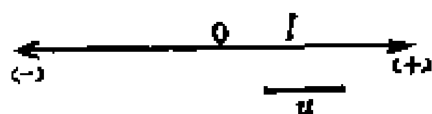


图14

推广上面的例子，任取一直线l，l上任取一点O，任意取一个距离u作长度单位（图14）。在l上任意取一个方向作正方向，与它相反的方向作负方向（上面的例子中，东方是正方向，西方是负方向，一里即的u）。类似的用"+"、"0"、"—"分别代表"在O点沿正方向……u"、"在O点"及"在O点沿负方向……u"。那么l上的每一点有一个实数配成对。或者说把几何学里的直线l上的点译成代数学里的实数，及把代数学里的实数译成几何学里的直线l上的点。

2 平面上的点与实数组的对应

在一平面(π)上任取二互相垂直的直线 $X'OX$及$Y'OY$，设O为交点。规定OX是 $X'OX$上的正方向，OX' 是负方向；规定OY是 $Y'OY$ 上的正方向，OY'是负方向。又任取一距离u作为$X'OX$及$Y'OY$上的长度单位。根据第四章第1节1款$X'OX$上的点与实数配成对；$Y'OY$上的点也与实数配成对(图15)。

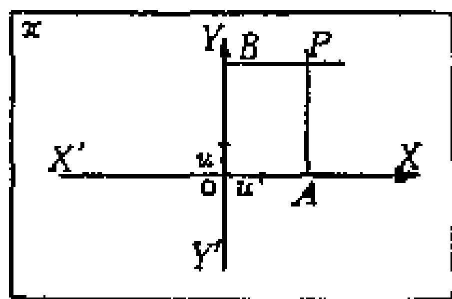


图15

在平面（π）上任取一点P。作$Y'OY$及$X'OX$的平行线，各

交$X'OX$及$Y'OY$于A点及B点。A点在 $X'OX$上，所以A点可以译成一个实数，设为x；B点在$Y'OY$上，所以B点也可以译成一个实数，设为y。有了一个P便可以得一实数组（x，y）。反过来，有了一实数组（x，y），先把x译成$X'OX$上的一点A，再把y译成$Y'OY$上的一点B。过A及B各作$Y'OY$及$X'OX$的平行线相交，即得一点P。所以有了一组实数（x，y）可以找到一点P。如果x_1等于x_2及y_1等于y_2时，我们说两实数组（x_1，y_1）与（x_2，y_2）相同；如果x_1不等于x_2或y_1不等于y_2时，我们说这两实数组不同。现在我们可以得到一个结论：

对于平面(π)上任一点P，必有一实数组（x，y）与P配对，而且也只有一实数组（x，y）与P配对。不同的两点P_1及P_2各与不同的实数组(x_1，y_1)及（x_2，y_2）配对。反之对于任一实数组（x，y），(π）上必有一点P与（x，y）配对，而且也只有一点P与（x，y）配对。不同的两实数组（x_1，y_1）及(x_2，y_2）各与不同的两点P_1及P_2相配对。

或者说，"几何学里的平面(π)上的点，可以译成代数学里的实数组（x，y）；反之代数学里的实数组（x，y）也可以译成几何学里的平面(π)上的点"。x称为P点的横坐标，y称为P点的纵坐标。(x，y）称为P点的坐标。

3 直线与一次方程式

假设作$\angle XOY$及$\angle X'OY'$的分角线$W'OW$(图16)。$W'OW$上任取一点P。过P作$Y'OY$及$X'OX$的平行线各交$X'OX$，$Y'OY$于A点及B点。由初等几何学我们知道OA之长等于OB之长。但OA之长即是x，OB之长即是y，所以$x=y$或$x-y=0$。即是说P点的坐标（x，y）总适合二元一次方程式$x-y=0$或$x=y$；反之任取适合$x=y$的一实数组（x，y），把x译成$X'OX$上的点A，

把y译成$Y'OY$上的点B。过A及B各作$Y'OY$及$X'OX$的平行线交于P点。$APBO$是一个正方形。所以OP是$\angle AOB$的平分线，或者说P在$W'OW$上。由此得到下面的结论：

$W'OW$上的任一点P译成的实数组(x, y)适合$x-y=0$；反之，适合$x-y=0$的任一实数组(x, y)译成的点P在$W'OW$上。

或者说平面(π)上的直线$W'OW$可以译成二元一次方程式$x-y=0$反之，二元一次方程式$x-y=0$可以译成(π)平面上的$W'OW$直线。

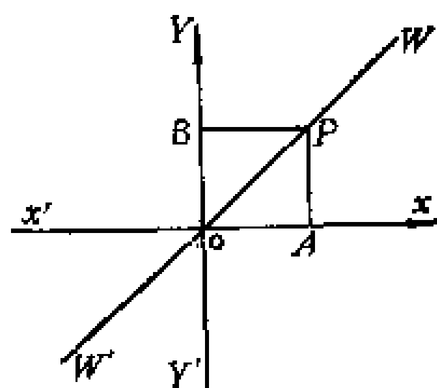


图16

更推广一些，平面(π)上任取一直线l，一定可以找到一个二元一次方程式：

$ax+by+c=0$ （a，b，c均为实数；a及b不同时为零）(1)

使得l上任一点P所译成的(x, y)都适合方程式(1)。

反之，任取一个二元一次方程式(1)，必能找到(π)上的一直线l，使得适合(1)的任一组(x, y)所译成的点P都在l上。

现在作一个几何代数对照辞典如下：

几何学	代数学
平面(π)上一点P_1	一组实数(x_1, y_1)
平面(π)上一直线L_1	一二元一次方程式： $a_1x+b_1y+c_1=0$ （a_1, b_1, c_1均为实数；a_1及b_1不同时为零）。
P_1在L_1上，或l_1过P_1	(x_1, y_1)适合$a_1x+b_1y+c_1=0$
……	……

这辞典后面还要继续补充，现在我们举一个例子说明它的用法。亚力山大大学后期著名的数学家巴布士有一个有趣的定理如下：

在一平面(π)上任取二直线l_1及l_2。在l_1及l_2上各取三点A_1，A_2，A_3，及B_1，B_2，B_3。假设A_1B_2与A_2B_1交于C_3；A_2B_3与A_3B_2交于C_1；A_1B_3与A_3B_1交于C_2。则C_1，C_2，C_3三点在一直线l_3上（图17）。

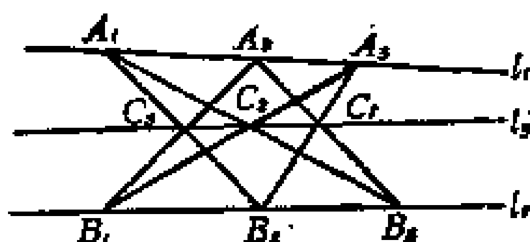


图17

利用上面的辞典把这几何学的定理译成代数学的定理：

几　何　学	代　数　学
平面(π)上任取两直线l_1与l_2。	任取两个二元一次方程式： $a_1x+b_1y+c_1=0$。　(1) 与$a_2x+b_2y+c_2=0$。　(2)
l_1上任取三点A_1，A_2，A_3。	任取适合(1)的三组(x_1,y_1) (x_2,y_2)，(x_3,y_3)
l_2上任取三点B_1，B_2，B_3。	任取适合(2)的三组(x_4,y_4)， (x_5,y_5)，(x_6,y_6)。
作l_4过A_1及B_2。	找$a_4x+b_4y+c_4=0$。　(4) 使得(x_1,y_1)及(x_5,y_5)适合。(4)
作l_5过A_2及B_1。	找$a_5x+b_5y+c_5=0$　(5) 使得(x_2,y_2)及(x_4,y_4)适合(5)。
设l_4及l_5交于C_3。	设联立方程式$\begin{cases}(4)\\(5)\end{cases}$之公根为 (x_7,y_7)。
作l_6过A_2及B_3。	找$a_6x+b_6y+c_6=0$。　(6) 使得(x_2,y_2)及(x_6,y_6)适合。(6)
作l_7过A_3及B_2。	找$a_7x+b_7y+c_7=0$。　(7)

几　　何　　学	代　　数　　学
设l_6及l_7交于C_1。	使得(x_3,y_3)及(x_5,y_5)适合(7)。设联立方程式$\begin{cases}(6)\\(7)\end{cases}$之公根为$(x_8,y_8)$。
作l_8过A_1及B_3。	找$a_8x+b_8y+c_8=0$。　(8) 使得(x_1,y_1)及(x_6,y_6)适合(8)。
作l_9过A_3及B_1。	找$a_9x+b_9y+c_9=0$。　(9) 使得(x_3,y_3)及(x_4,y_4)适合(9)。
设l_8及l_9交于C_2。	设联立方程式$\begin{cases}(8)\\(9)\end{cases}$之公根为$(x_9,y_9)$。
终结：C_1,C_2和C_3在一直线l_3上。	终结：有一个二元一次方程式 $a_3x+b_3y+c_3=0$。　(3) 使得(x_8,y_8),(x_9,y_9)及(x_7,y_7)都适合(3)。

如果你懂得解代数学里的联立一次方程式而不知道巴布士定理的几何证法，你只要把右边的代数学的定理证完，再翻成几何学的结论便成了。这种方法有一个好处，代数学的联立一次方程式有公式可以一步步地计算，不必费脑力。但是左边的几何学的定理如用几何学的方法去证明必须作一些补助线，这些补助线的作法的规律性则比较难于掌握。

将几何定理译成代数定理，便可用计算机来作验证，这便是几何定理的现代机器证明的核心。

4 圆的方程式

在(π)上任取二点P及Q，假设其坐标为(x_1, y_1)及(x_2,y_2)。过P及Q各作$Y'OY$及$X'OX$的平行线，设交成R点（图18），则$\triangle PQR$是直角三角形，$\angle PRQ$是直角。利用前面所说的毕达

哥拉斯定理（第一章第II节1款），得到$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2$。但$\overline{PR}^2=(y_1-y_2)^2$，$\overline{RQ}^2=(x_1-x_2)^2$。用$d$表示$PQ$的距离，则

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 [1]。$$

此[1]式便是两点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的距离的公式。

假设在平面(π)上任取一点P作圆心，r作半径画一个圆C（图19）。设圆心P的坐标为(a, b)。圆周上任取一点Q，其坐标为(x, y)。由圆的定义，PQ的距离d等于r。利用距离公式[1]，即得

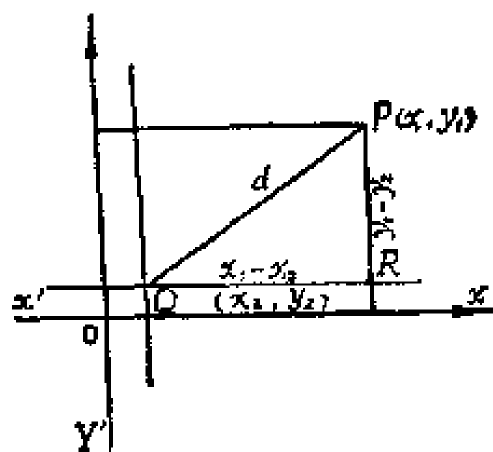


图18

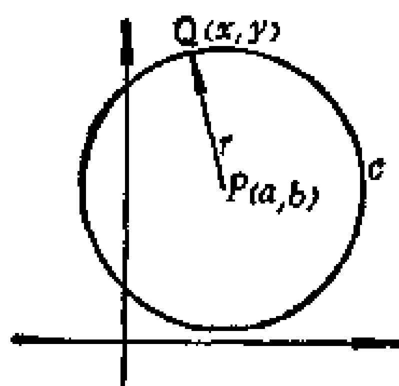


图19

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 [2]。$$

反之，适合[1]式的任何一组(x, y)所译的点Q与P点的距离都是r，所以Q在以P为圆心，r为半径的圆C上，由此我们便可以把圆的方程式[2]列入上面的几何代数对照辞典中。

5　初等几何学作图问题

根据第二章第II节4款中所说的欧氏作图法译成代数学的语言如下表。

表中第2项只不过说不限制x及y的活动范围，没有特别的地方。第1项里的a_1，b_1，c_1的比例为$(y_1-y_2):(x_2-x_1):$

几　　　何　　　学	代　　　数　　　学
1．已知二点P_1及P_2 可作一直线l_1	1．已知(x_1,y_1)及(x_2,y_2) 可得一方程式． $a_1x+b_1y+c_1=0.$　(1) 使$a_1x_1+b_1y_1+c_1=0.$　(1′) $a_1x_2+b_1y_2+c_1=8.$　(1″)
2．无限地延长一直线l_1．	2．不限制x及y的活动范围。
3．已知圆心P及圆周上一点Q 作一圆．	3．已知(x_3,y_3)及(x_4,y_4) 得到二元二次方程式 $(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$ $=(x_3-y_4)^2+(y_3-y_4)^2$.(2) 或$x^2+y^2+e_1x+f_1y+g_1=0$.(2′)

$(x_1y_2-x_2y_1)$。所以$a_1:b_1:c_1$可以由（x_1,y_1）及（x_2,y_2）经过加、减、乘、除得来。同样，第3项的(2′）中的e_1,f_1,g_1也可以由（x_3，y_3）及（x_4，y_4）经过加、减、乘、除得来，因为$e_1=-2x_3$，$f_1=-2y_3$及$g_1=x_3^2+y_3^2-(x_3-x_4)^2-(y_3-y_4)^2$的缘故。

利用圆规和直尺可以求得三种新点：第一种是二直线的交点；第二种是一直线与一圆的交点；第三种是两圆的交点；译成代数学的语言便是可以解三种联立方程式：

第一种是两个一次方程式

$$\begin{cases}a_2x+b_2y+c_2=0.\\a_3x+b_3y+c_3=0。\end{cases}$$

第二种是一个一次方程式和一个二次方程式

$$\begin{cases}a_4x+b_4y+c_4=0,\\x^2+y^2+e_2x+f_2y+y_2=0。\end{cases}$$

第三种是两个二次方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2+e_3x+f_3y+g_3=0, \\ x^2+y^2+e_4x+f_4y+g_4=0。\end{cases}$$

学过代数学的人便知道第一组方程式的公根可以由a_2，b_2，c_2，a_3，b_3，c_3用加减乘除的方法算出。第二组方程式的公根可以由a_4，b_4，c_4，e_2，f_2，g_2用加减乘除及开平方算出。第三组方程式的公根可以由e_3，f_3，g_3，e_4，f_4，g_4，用加减乘除及开平方算出。总之这三种联立方程式的公根都可以由其系数（a，b，c，e，f，g等）用加减乘除及开平方算出。但是这些系数a，b，c，e，f，g等，又可以由已知点P_1，P_2，P，Q等的坐标（x_1，y_1），（x_2，y_2），（x_3，y_3），（x_4，y_4）等用加减乘除算出。所以这些新点的坐标（即联立方程式的公根），可以由已知点的坐标用加减乘除及开平方算出。得到下面重要的结论：

由已知点经过欧氏作图法所能得到的新点的坐标，都可以由已知点的坐标用有限多次的加减乘除及开平方算出来。反之，如果一点的坐标不能由已知点的坐标用有限多次的加减乘除及开平方算出，便不能由已知点用欧氏作图法作出。

一点的坐标不过是二个长度，故上面的结论又可改写如下：

由已知的长度经过欧氏作图法所能得到的新长度都可以由已知的长度用有限多次的加减乘除及开平方算出。反之，如果一个长度不能由已知的长度用有限多次的加减乘除及开平方算出，便不能由已知的长度用欧氏作图法作出。

上面的讨论太空洞了，现在举几个例子来说明：

例一 二倍立方体的问题，已知一立方体求作另一立方体，使其体积为已知立方体的二倍（图20）。为了简便计，我们不妨假设已知立方体的一边之长为1，则已知立方体的体积为$1^3=1$，求作的立方体的体积便是$2\times1=2$，所以求作的立方体

的每边之长便是$\sqrt[3]{2}$。即是说由1用有限多次的加减乘除及开平方必须算得$\sqrt[3]{2}$。这是不可能的，所以倍立方的问题不能用欧氏作图法解决。

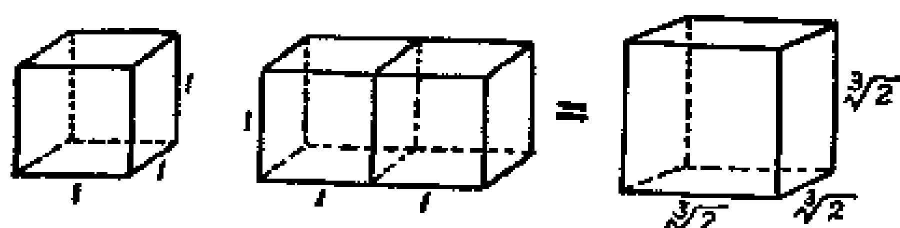


图20

读者也许会问，由1用加减乘除及开平方可以得到些什么东西呢？用加法可以由1得到$2=1+1$，$3=1+2$，…即是可以得到任何的正整数。再由正整数用减法便可以得到$0=1-1$，$(-1)=0-1$，$(-2)=(-1)-1$，即是可以得到零及负数。再用乘法和除法便可以得到任何的分数；所以由1可以得到所有的有理数。如果加减乘除及开平方混合的用起来便可以得到下面各式各样的数目：

$$\sqrt{7+\frac{5}{\sqrt{21}}}-\sqrt{8\times\frac{\sqrt{6}}{14}},\quad \frac{4-7\sqrt{5}}{\sqrt{2+\frac{8-\sqrt{3}}{\sqrt{17}}+\sqrt{7}}},$$

……

但是这些花样中都不会有$\sqrt[3]{\ }$出现。所以得不到$\sqrt[3]{2}$。

例二 三分角的问题：为了证明简单起见，我们只证明三等分一个30°的角是不可能的。如果30°都不能三等分，便不要再费神去找一个任意角

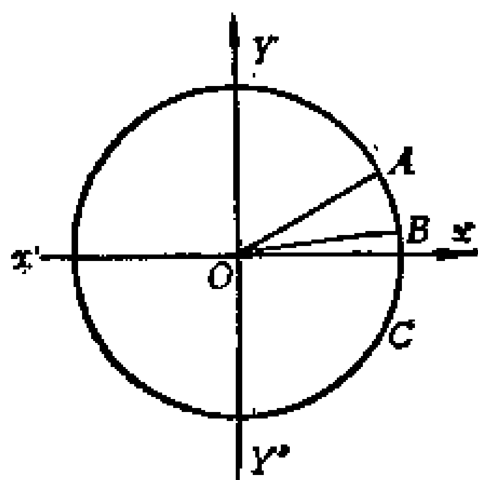


图21

的三等分法了

假设$\angle XOA=30°$，$OA=1$（图21）。A点的坐标便是$(\cos 30°, \sin 30°)$，或$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$。以$O$为圆心，$OA$为半径作一圆$C$。假设$OB$是$\angle AOX$的三等分角线，$B$点是$OB$与$C$的交点，$\angle XOB$等于$10°$。$B$点的坐标设为$(x, y)$，则$x=\cos 10°$，$y=\sin 10°$，现在问题简单到由$\frac{\sqrt{3}}{2}$及$\frac{1}{2}$用加减乘除及开平方能不能算得出$x$及$y$。

三角学里有一个简单公式：

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \tag{1}$$

在(1)式中设$\theta=10°$，又因为$y=\sin 10°$，即得

$$\frac{1}{2} = 3y - 4y^3. \tag{2}$$

这个方程式的三个根中有两个是复数。唯一的实数根可以写成：

$$y = \frac{-1}{4}\left\{\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{4}}\right\}. \tag{3}$$

(3)式中又出现了$\sqrt[3]{\ }$的符号。由$\frac{1}{2}$及$\frac{\sqrt{3}}{2}$用加减乘除及开平方的方法便得不到(3)式中的y，所以B点不能由A点用欧氏作图法作出，也即是用欧氏作图法不能三等分$30°$角。

上面两个例子都是因为要开立方，所以不能用欧氏作图法作出。如果用一个可以开立方的作图工具便可以解决了。

例三　方圆问题：已知一个圆，求作一等面积的正方形。设圆的半径为1，圆面积即为π，求作的正方形的一边应为$\sqrt{\pi}$。问题简单到由1用有限多次的加减乘除及开平方能否算出$\sqrt{\pi}$。

首先得算出π。可是π是超越数而不是代数数，所以即使用能开立方、四方、五方等等的开方工具也是无法作出的。

解析几何学的方法证明了这三个作图题都不能用欧氏作图法作出。我们再举一个例子来说明解析几何学帮助了我们找出用欧氏作图法可以解决的问题。

例四 分圆问题：高斯在研究分一已知圆为n等分时，发现用欧氏作图法可以把圆分成17等分。在他的墓碑上便刻上一个圆内接正17边形的图样。假如不用解析几何学的方法，简直是很难着手的。

6 二次曲线

上面已经说过，二元一次方程式是和一平面上的直线对应。现在我们来看二元二次的方程式和一平面上的什么曲线对应。

一般的二元二次方程式的形式是：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \qquad (1)$$

a，b，c，d，e，f都是实数，a，b，c不全是零。

代　　数　　学	几　　何　　学
A. 〔1〕，$\Delta>0$ （特别情形Ⓗ$=0$）。	双曲线 （退化成二条重合或不重合的直线）。
B. 〔1〕，$\Delta=0$.	抛物线.
C. 〔1〕，$\Delta<0$ （特别情形$a=c,b=0$） （特别情形$a=c,b=0$，Ⓗ$=0$）。	椭圆 （圆） （点圆，即半径为零的圆，即一点）。

设 $\Delta = b^2 - 4ac$,

$$Ⓗ = acf + \frac{1}{4}bde - \frac{1}{4}cd^2 - \frac{1}{4}bf^2 - \frac{1}{4}ae^2.$$

C类中又包括虚椭圆，后面（第III节1款）再谈到。

由上面代数几何对照辞典中可以看出，代数学里的二元二次方程式和几何学里的圆锥曲线相对应。所以圆锥曲线又称为二次曲线。只需要研究二元二次方程式的性质，便可以知道圆锥曲线的性质了。

II 坐标几何学

在本章第I节中所用的坐标系统叫直角坐标系统，因为所取的$X'OX$及$Y'OY$是互相垂直的。我们并没有理由固执着 $X'OX$ 一定垂直于$Y'OY$。假设其交角为θ(图22)，在平面(π) 上任取一点P，过P作$Y'OY$及$X'OX$的平行线，各交$X'OX$及$Y'OY$ 于A点及B点。$X'OX$上的A点译成实数x；$Y'OY$ 上的 B 点译成实数y。把P点和(x, y)配成对，这样我们也可以造出另一部几何代数对照辞典。这两部不同的辞典对于不同的问题各有难易的地方，但是有效的范围都是一样的。

自然我们也不一定固执地用$X'OX$及$Y'OY$。譬如在(π) 上任取一点O，由O作线段OA，对于(π)上任一点P，连接OP（图23）。设 OP 之长为r，$\angle AOP = \theta$，由 P 点可以得到(r, θ)。反过来，已知(r, θ)以O为圆心，r为半径作一圆C。作直线OQ，使$\angle AOQ = \theta$，圆C和OQ的交点即为P。所以我们又可把P点和(r, θ)配成对，另外写成一部几何代数对照辞典。这种定点的方法叫做极坐标系统。坐标几何学便是研究这些各式各样的几

何代数对照辞典之间的关系和解决特别问题的难易的。

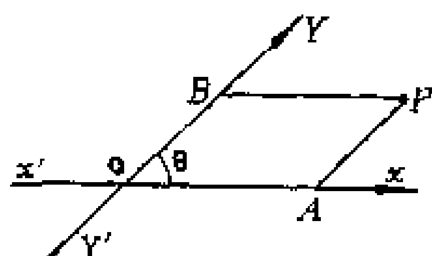


图22

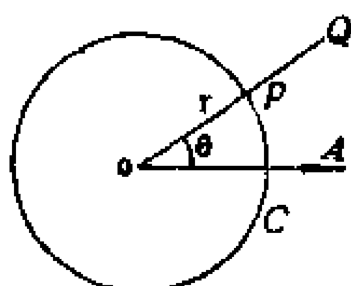


图23

1 无限远直线

假设(x, y)是P点的直角坐标，设$x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$。已知(x, y)即可得到$x_1:x_2:x_3$（等于$x:y:1$）。反之，已知$x_1:x_2:x_3$，①便可以得到(x, y)（x等于$x_1:x_3$，y等于$x_2:x_3$）。所以P点可以和$x_1:x_2:x_3$配对。如果$x_1:x_2:x_3=x_1':x_2':x_3'$，我们说$(x_1, x_2, x_3)$与$(x_1', x_2', x_3')$相同；否则就是不相同。这样，我们又可以把$P$点和$(x_1, x_2, x_3)$配成对。不同的两点$P$与$Q$对应于不同的$(x_1, x_2, x_3)$与$(x_1', x_2', x_3')$。相同的点对应于相同的$(x_1, x_2, x_3)$，这种坐标叫均匀坐标。设一直线的方程式为：

$$ax+by+c=0. \tag{1}$$

以$x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$代入(1)式，再以x_3乘全式，即得

$$ax_1+bx_2+cx_3=0. \tag{2}$$

(2)式比(1)式看起来似乎规则得多。现在我们看看可以变些什么花样。假设有二条直线l_1及l_2，其方程式各为：

$$l_1:\ x+y+1=0. \tag{3}$$

$$l_2:\ x+y-1=0. \tag{4}$$

这两条直线实际上是互相平行的（图24）。现在改用均匀坐标(x_1, x_2, x_3)，(3)和(4)式便可写成：

注解：① x_1，x_2，x_3都等于零时，$x_1:x_2:x_3$便没有意义了，所有在本节中和以后的讨论中，这种为零的情形都要除外。

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (3')$$

和
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0. \qquad (4')$$

(3′)和(4′)的公根$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : (-1) : 0$。由代数学的结果翻译成几何学的结果，即是$l_1$和$l_2$应当交于一点$P$，其均匀坐标为(1，−1，0)。但是我们已经说过$l_1$和$l_2$是平行的，所以不会有交点，这样便发生了矛盾。为了免除这矛盾，我们不妨假设l_1和l_2是相交于无限远点P，它的均匀坐标便是(1，−1，0)。许可了无限远点的存在，我们便可以得到下面的结果：

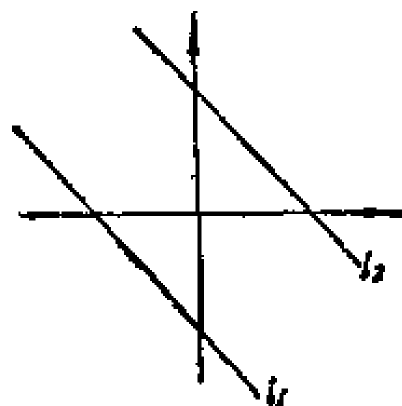


图24

(*A*) 平面(π)上任一直线l上有一无限远点P，也只有一无限远点P。假如l的方程式是：

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

P点的均匀坐标便是(b，$-a$，0)。

(*B*) 在π上与一直线l平行的所有的直线都交于l上无限远点P。即是一束平行线可看作经过同一无限远点的一束直线。

(*C*) 如果l_1和l_2相交于一有限点，即l_1和l_2不是平行的，则l_1上的无限远点与l_2上的无限远点不是同一点。

由(*C*)我们知道在一平面(π)上有无穷多个无限远点。

(*D*) 一平面(π)上的无限远点组成一条直线，其方程式是

$x_3 = 0$，这条直线叫做平面(π)上的无限远直线。

结论：许可无限远点及无限远直线的存在，一平面(π)上的任何不同的二直线都有一个交点，也只能有一个交点。

2 直线坐标

直线坐标是朴留刻尔发明的。在本章第II节1款中的(2)式

里，一条直线l的方程式是：

$$ax_1+bx_2+cx_3=0. \qquad (1)$$

如果我们把(a, b, c)和l配对起来，(a, b, c)和(a_1, b_1, c_1)是否相同，依$a:b:c$和$a_1:b_1:c_1$是否相等而定，则(a, b, c)可以用作l的线坐标。为了方便起见，我们用(u_1, u_2, u_2)表示直线l的线坐标①。假设P点的均匀坐标是(x_1, x_2, x_3)，经过P点的任一直线l'的线坐标(u_1', u_2', u_3')都一定适合下面的方程式：

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0. \qquad (2)$$

方程式(2)称为P点在线坐标系统下的方程式，读者也许会不了解什么叫点的方程式。我们可以由下面的二句话的比较得出它的意义来。

A. 在点坐标(x_1, x_2, x_3)系统下，一直线l的方程式是在l上的点的点坐标(x_1, x_2, x_3)所适合的代数关系。

B. 在线坐标(u_1, u_2, u_3)系统下，一点P的方程式是过P的直线的线坐标(u_1, u_2, u_3)所适合的代数关系。

用图表来说明，我们可以列成下面的表：

几何学	代数学	
	点坐标系统	线坐标系统
一点P'.	(x_1', x_2', x_3')	$u_1x_1'+u_2x_2'+u_3x_3'=0$.
一直线l'.	$u_1'x_1+u_2'x_2+u_3'x_3=0$.	(u_1', u_2', u_3').
P'在l'上，即l'经过P'.	$u_1'x_1'+u_2'x_2'+u_3'x_3'=0$	$u_1'x_1'+u_2'x_2'+u_3'x_3'=0$.

注解：① 即是把a写作u_1，b写作u_2，c写作u_3，使得(u_1, u_2, u_3)看起来比(a, b, c)整齐一些。

由此我们可以看出点坐标系统和线坐标系统的对称性，这性质在后面(第五章第II节)会整理成一个重要的原理。

举一个例来说明上面的讨论。设O点的直角坐标是(0，0)，O点的均匀点坐标便是(0，0，1)。过O点的直线l'在直角坐标系统下的方程式是$u'_1x+u'_2y=0$，改为均匀点坐标系统下的方程式是$u'_1x_1+u'_2x_2=0$。所以l的线坐标便是(u'_1，u'_2，0)。不管u'_1及u'_2的数值如何，(u'_1，u'_2，0)一定适合下面的方程式：

$$0\cdot u_1+0\cdot u_2+1\cdot u_3=0,$$

即 $$u_3=0.$$

所以O点在直线坐标系统下的方程式是$u_3=0$。

3 二阶曲线

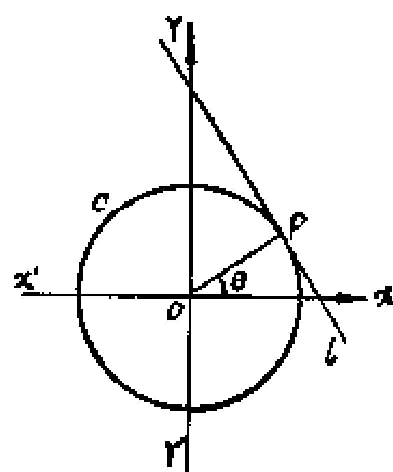


图25

以O为圆心，1为半径作一个圆C(图25)。在直角坐标系统下这圆的方程式是：

$$x^2+y^2=1. \qquad (1)$$

以$x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$代入(1)式并以x_3^2乘全式即得

$$x_1^2+x_2^2=x_3^2.$$

过圆C上一点P作圆C的切线l的方程式为：

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1. \qquad (2)$$

此地的θ等于$\angle XOP$。

将(2)化为均匀坐标系统下的方程式便是：

$$x_1\cos\theta+x_2\sin\theta=x_3,$$

或 $$x_1\cos\theta+x_2\sin\theta-x_3=0 \qquad (3)$$

由(3)得知l的线坐标为($\cos\theta$，$\sin\theta$，-1)，不管θ为何角度，

$(\cos\theta, \sin\theta, -1)$都适合下面的方程式：

$$u_1^2+u_2^2-u_3^2=0①, \tag{4}$$

所以圆C的切线的线坐标适合一个二次方程式；反之，适合二次方程式(4)的(u_1, u_2, u_3)所代表的直线都切于圆C。

一圆锥曲线可以看作该圆锥曲线上的点全体集合而成的图形，也可以看作该圆锥曲线的切线的全体所围成的图形；前者是在点坐标系统之下的看法，后者是在线坐标系统之下的看法。

任取一个二元二次方程式：

$$a_{11}u_1^2+a_{12}u_1u_2+a_{13}u_1u_3+a_{22}u_2^2+a_{23}u_2u_3+a_{33}u_3^2=0. \tag{5}$$

(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}都是实数，且不全都是零)。则有一个圆锥曲线C使得适合(5)式的(u_1, u_2, u_3)所代表的直线都切于C，而且切于C的任一直线的线坐标都适合(5)式。所以线坐标下的二次方程式也和圆锥曲线相对应。为了和本章第1节6款中的点坐标下二次曲线有分别起见，我们称之为二阶曲线。为了清楚起见，在几何代数对照辞典中加入下面的一栏。

几何学	代数学	
	点坐标系统	线坐标系统
圆锥曲线（又名二次曲线及二阶曲线）。	$a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2=0$。$aij$均为实数，但不全是零。	$b_{11}u_1^2+b_{12}u_1u_2+b_{13}u_1u_3+b_{21}u_2u_1+b_{22}u_2^2+b_{23}u_2u_3+b_{31}u_3u_1+b_{32}u_3u_2+b_{33}u_3^2=0$。$bij$均为实数，但不全是零。

注解：① $(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2-(-1)^2=0$即三角学的恒等式$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$。

III 虚 元 素

1 虚点与虚线

在平面(π)上取一条直线l和一个圆C，有三种不同的关系：l与C交于不同的两点，l与C切于一点，或者l与C不相交(图26)。译成代数学的说法，是一个二元一次方程式：

$$ax+by+c=0. \tag{1}$$

(a，b，c为实数，而不全是零)

和一个二元二次方程式：

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0. \tag{2}$$

(d，e，f为实数，而不全是零)

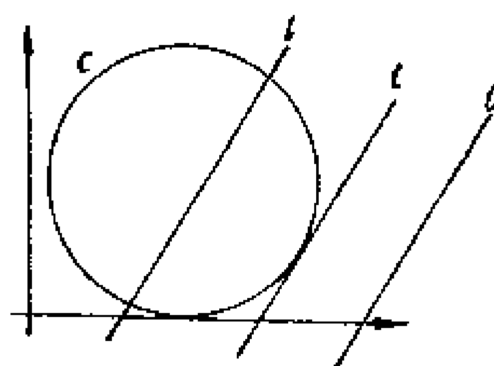


图26

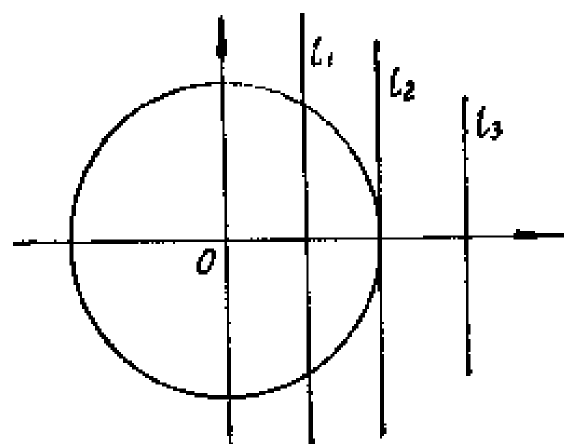


图27

二式联立起来求公根(x, y)。现在先把(1)和(2)式改为均匀坐标系统下的方程式，得到

$$ax_1+bx_2+cx_3=0, \tag{1'}$$

$$x_1^2+x_2^2+bx_1x_3+cx_2x_3+fx_3^2=0. \tag{2'}$$

(1′)及(2′)一定有两组公根(x_1', x_2', x_3')及(x_1'', x_2'', x_3'')。但是x_1'，x_2'，x_3'，x_1''，x_2''，x_3''中可能有复数。由此我们看出代数

学里一定有两组公根，而几何学里却不一定有二个交点。为了解决这矛盾，我们不妨许可虚点的存在。举一个实例来说，假设以O为圆心，以1为半径作一圆C(图27)，其方程式为：

$$x^2+y^2=1。$$

取三条直线l_1，l_2及l_3，其方程式各为

$$x=\frac{1}{2},\quad x=1,\quad 及\quad x=2。$$

化为均匀坐标即为

$$C:\quad x_1^2+x_2^2=x_3^2,$$

$$l_1:\quad x_1=\frac{1}{2}x_3,$$

$$l_2:\quad x_1=x_3,$$

$$l_3:\quad x_1=2x_3。$$

则C与l_1的二交点的坐标各为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$及$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，即二不同的实点。

C与l_2的二交点的坐标均为$(1,\ 0,\ 1)$即为二相同的实点。

C与l_3的二交点的坐标各为$(2,\ i,\ 1)$及$(2,\ -i,\ 1)$，即为二个共轭的虚点$(i=\sqrt{-1})$。

结论：许可有虚点的存在，一直线与一圆一定有二个交点。

同样地，在平面(π)上任取一点P及一圆C(图28)，过P作C的切线，有三种不同的情形：如P在圆外，可以作二条不同切线；如P在圆上，只可以作一条；如果P在圆内，则根本不能作。但是许可虚线的存在，我们可以说，由一点P一定可以作一个圆C的二条切线。

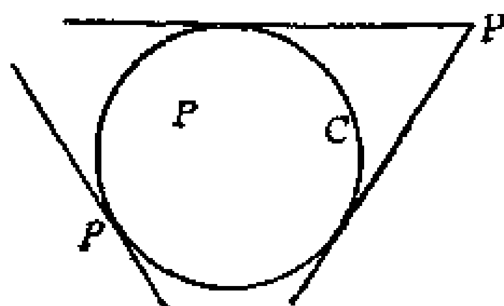


图28

在一条实的直线l上只有二个虚点P_1及P_2。设l的线坐标为(u_1', u_2', u_3')则P_1及P_2的点坐标各为$(u_3'+iu_2',\ u_3'-iu_1',\ -u_1'-u_2')$及$(u_3'-iu_2,\ u_3'+iu_1',\ -u_1'-u_2')$。[①] 此两虚点的坐标互为共轭复数。

过一实点P，可以作二条虚直线l_1及l_2。设P之点坐标为$(x_1',\ x_2',\ x_3')$，则l_1及l_2的线坐标各为$(x_3'+ix_2',\ x_3'-ix_1',\ -x_1'-x_2')$及$(x_3'-ix_2',\ x_3'+ix_1',\ -x_1'-x_2')$。此两虚直线的坐标互为共轭复数。

2 虚 圆

取一个方程式 $x_2+y_2=-1$ (1)

来研究。这方程式所代表的曲线上的点都是虚点，也可以说这是以O为圆心，$\sqrt{-1}$为半径的圆；因为半径是虚的，称为虚圆，用以区别半径是实数的实圆。一般虚圆的方程式是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=-r^2。 \tag{2}$$

r为大于零的实数；a，b为任何实数。

如果一个圆的半径等于零，便只有一点，叫做点圆。一般点圆的方程式是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0。 \tag{3}$$

a，b为任何实数。方程式(3)所表示的曲线只有一实点，它的坐标为$(a,\ b)$。

实圆、虚圆和点圆合称为圆。一般圆的方程式是：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k。 \tag{4}$$

注解：① l为实线，所以不妨设u_1，u_2，u_3均为实数。且$(u_3'+iu_2'):(u_3'-iu_1'):(-u_1'-u_2')$不能等于三实数之比，所以$(u_3'+iu_2',u_3'-iu_1',\ -u_1'-u_2')$代表一虚点；又因为$u_1'(u_3'+iu_2')+u_2'(u_3'-iu_1')+u_3'(-u_1'-u_2')=0$，所以$(u_3'+iu_2',\ u_3'-iu_1',\ -u_1'-u_2')$所代表的虚点在$l$上。同理，$(u_3'-iu_1',\ u_3'+iu_2',\ -u_1'-u_2')$代表$l$上之一虚点。

a，b，k为任何实数。

现在，我们要求圆和无限远直线的交点。把(4)式化为均匀坐标的方程式

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = kx_3^2. \qquad (4')$$

无限远直线的方程式是

$$x_3 = 0. \qquad (5)$$

把(4′)和(5)两方程式联立起来求解，便得到二组公根，

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : i : 0, \quad x_1 : x_2 : x_3 = 1 : (-i) : 0$$

依几何学中的惯例，用I和J各代表坐标为$(1, i, 0)$和$(1, -i, 0)$的两点。I和J称为虚圆点。

结论：一平面上所有的圆都经过此平面上的虚圆点I和J。

虚圆不过是虚的二次曲线的特别情形，但是太多的计算会使读者乏味。我们还是回到有美丽的图形的几何学里去吧！附带声明一句，本章中所谈到的都是欧派平面解析几何学。此外还有欧派的立体解析几何学以及非欧派的解析几何学，这里谈不到了。

第五章 射影几何学

I 射影几何学小史

射影几何学的许多重要观念如交比、调和点等早在阿波罗纽斯和巴布士的著作中已经见到了，但是后来居上的解析几何学支配了几何学研究的方法，直到19世纪初才由蒙日重新唤起人们的注意。其后的有名学者极多，其中以庞塞勒及冯·斯陶特最负盛名。庞塞勒是拿破仑1812年进攻俄国的军队中的一个军官，法军被击溃后，庞塞勒被俘。他在沙拉托夫的牢狱中写成了"图形的射影性质论"，奠定了射影几何学的基础。冯·斯陶特是数学史中崇尚纯粹几何方法的几何学者，他所著的"位置几何学"一书可以说是非常优美的一本纯粹几何书，其中完全不借代数学的帮助，也不用计算距离的长短和角度的大小。他代表了不甘受解析几何学的方法支配的纯粹几何学者。这一派几何学又称为综合几何学，使与前面所说的解析几何学有所分别。

II 对偶原理

在第四章第II节2款中曾经提到点与直线的对称性，现在把它归纳成平面上的对偶原理。为方便计，我们用大写的英文字母A，B，C…记一平面（π）上的点，用小写的英文字母a，b，c，…记一平面(π)上的直线，用AB记过A，B的直线，① 用ab记a,b的交点。(注：如a与b平行，ab即为a与b上的无限远点。)如果一个定理中只谈到"点在直线上"成"直线经过点"，那么把定理所有的小写字母改为大写字母，所有的大写字母改为小写字母；所有的"直线"字样改为"点"字，所有的"点"字改为"直线"字样；"在一直线上"改为"过一点"，"过一点"改为"在一直线上"，这样

注解：①AB不只代表由A点到B点的线段，而且包括其两端的延长线。

更改之后，便得到一个新的定理，与原来的定理互称为对偶定理。

对偶原理说"两个互为对偶的定理，如果你证明了其中的一个，另一个不用证明便可以承认了。如果你只知道其中的一个，只要大写字母和小写字母对调，'点'和'直线'对调，'点在直线上'和'直线经过点'对调，便得出另外的一个"。

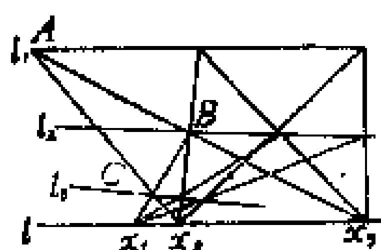
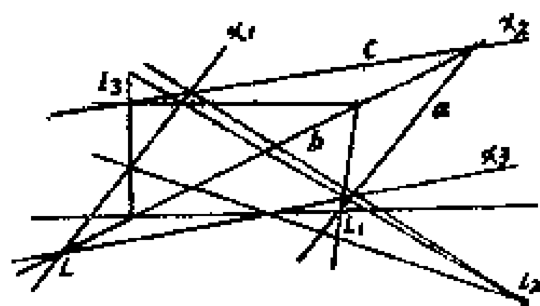
下面是两个例子：

例一 在前面中已经提到一个巴布士定理。现在我们把巴布士定理和它的对偶定理对照地写出来。

巴布士定理（图29）	**它的对偶定理**（图30）
假设A_1, A_2, A_3是在同一直线l_1上的三点。 B_1，B_2，B_3是在同一直线l_2上的三点。 C_3是A_1B_2及A_2B_1的交点。 C_2是A_1B_3及A_3B_1的交点。 C_1是A_2B_3及A_3B_2的交点。 终结：C_1, C_2, C_3在同一直线l_3上。 图29	假设a_1，a_2，a_3是过同一点L_1的三直线。 b_1，b_2，b_3是过同一点L_2的三直线。 c_3是a_1b_2及a_2b_1的联线。 c_2是a_1b_3及a_2b_1的联线。 c_1是a_2b_3及a_3b_2的联线。 终结：c_1, c_2, c_3过同一点L_3。 图30

例二 先叙述两个定义

定义：在平面(π)上任取不在同一直线上的三点A, B, C。 作三条直线AB, BC, CA。 这三点和三直线所组成的图形叫做完全三点形，用$\triangle ABC$记之。	**定义**：在平面(π)上任取不通过一点的三直线a, b, c。 作三个交点ab, bc, ca。 这直线和这三点所组成的图形叫做完全三线形，用$\triangle abc$记之。

定　　理（图31）	定　　理（图32）
假设：在平面(π)上取三直线l, l_1, l_2。 在l上取三点X_1, X_2, X_3。 作完全三点形$\triangle ABC$。 使BC过X_1点， CA过X_2点， AB过X_3点， A在l_1上， B在l_2上。 终结：这种$\triangle ABC$不只一个，所有的$\triangle ABC$的C点总在一直线l_3上。	假设：在平面(π)上取三点L, L_1, L_2。 过L取三直线x_1, x_2, x_3。 作一个完全三线形$\triangle abc$。 使bc在x_1直线上， ca在x_2直线上， ab在x_3直线上， a过L_1， b过L_2。 终结：这种$\triangle abc$不只一个，所有的$\triangle abc$的c线总经过一点L_3。
 图31	 图32

上面所谈到的只是平面上的对偶原理，现在我们要谈到空间的对偶原理。为方便计，用希腊字母α，β，γ……表示平面，用$\alpha\beta$记两平面α与β相交的直线。

假设一个定理只是关于点、直线和平面的位置，即是：(1)点在平面上或平面过点；(2)点在直线上或平面过直线；(3)一直线与一平面的交点或一直线与一点决定的平面。把这定理中

所有的“点”和“平面”对调，大写的英文字母和希腊字母对调，上面（1）（2）（3）三组关系中每一组的两句话对调，便可得到另一个定理，与原来的定理互称为空间的对偶定理。

空间对偶原理说：“两个空间的对偶定理中，你如果知道其中的一个便可以依上面的对调法求得另一个；只要证明其中的一个，另一个便不用证明了”。

例如：德沙格定理。

德沙格定理（图33）①	对　偶　定　理
假设：空间取六点 A_1，B_1，C_1；A_2,B_2,C_2；A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2三直线均过同一点L。 终结：A_1 B_1与A_2 B_2有一交点。 B_1C_1与B_2C_2有一交点。 C_1A_1与C_2A_2有一交点。 此三点在同一直线l上。 图33	假设：空间中取六平面α_1,β_1，γ_1；α_2,β_2，γ_2；$\alpha_1\alpha_2$，$\beta_1\beta_2$，$\gamma_1\gamma_2$三直线均在同一平面λ上。 终结，$\alpha_1\beta_1$与$\alpha_2\beta_2$在一平面上。 $\beta_1\gamma_1$与$\beta_2\gamma_2$在一平面上。 $\gamma_1\alpha_1$与$\gamma_2\alpha_2$在一平面上。 此三平面过同一直线l。 此定理中牵涉到十张平面的互相的关系。在纸上画出此图形时，无法看得清楚，故省略。如果不是由于对偶原理，便无从发现此定理。由此也可以看出对偶原理之价值了。

关于对偶原理，本章中还有继续的推广。

注解：①A_1,B_1，C_1，A_2,B_2，C_2六点并不一定在一平面上。这图形实际是立体的。如果这六点在一平面上，定理当然仍成立，有趣的是空间定理的证明比平面定理的证明容易得多。

III 透视图形

1 完全多点形与完全多线形

一平面（π）上最简单的图形是点与直线所组成的，例如一个三角形包括三顶点及其边。现在要推广它，仍然写成对偶的形式：

定　义（图34）	定　义（图35）
完全三点形，见上节例二。	完全三线形，见上节例二。
完全四点形包括四点A,B,C,D（其中任三点不能在一直线上）及其六条直线AB，AC，AD，BC，BD，CD和AB与CD，AC与BD，AD与BC的三个交点X，Y，Z（又称对边点）。	完全四线形包括四直线a,b,c,d（其中任三直线不过同一点）及其六个交点ab，ac，ad，bc，bd，cd和过ab与cd，ac与bd，ad与bc的三条直线x，y，z（又称对顶线）。
图34	图35
完全n点形包括n点（其中任三点不在同一直线上）及其$\frac{n(n-1)}{2}$条直线（每条经过这n点中的二点）。	完全n线形包括n直线（其中任三线不过同一点）及其$\frac{n(n-1)}{2}$个交点（每点在n直线中的二条直线上）。

2 透视中心和透视轴

为方便计，仍列表叙述：

定　　义	定　　义
假设：在一平面(π)上有两个三点形$A_1B_1C_1$，$A_2B_2C_2$， A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2三直线会于同点L。 则 此两个三点形称为"成中心透视"L称为透视中心。	假设：在一平面(π)上有两个三线形$a_1b_1c_1$，$a_2b_2c_2$， a_1a_2，b_1b_2，c_1c_2三点在同一直线l上。 则 此两个三线形称为"成轴透视"l称为透视轴。

关于透视图形的基本定理是德沙格定理。一个三角形可以看作一个三点形，也可以看作一个三线形。所以我们可以说两个三角形成中心透视或轴透视。

德 沙 格 定 理	对 偶 定 理(图36)
假设：同一平面(π)上两三角形成中心透视。 终结：此两三角形成轴透视。 用普通的说法： 假设$\triangle A_1B_1C_1$及$\triangle A_2B_2C_2$在平面(π)上， A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2会于同一点L	假设：同一平面(π)上两三角形成轴透视。 终结：此两三角形成中心透视。 用普通的说法： 假设$\triangle a_1b_1c_1$及$\triangle a_2b_2c_2$在平面(π)上， a_1a_2，b_1b_2，c_1c_2在同一直线l上。

德 沙 格 定 理	对 偶 定 理（图36）
终结：A_1B_1，A_2B_2的交点 B_1C_1，B_2C_2的交点 C_1A_1，C_2A_2的交点 在同一直线l上。 现在说的是平面的德沙格定理，其图形与第II节中空间的德沙格定理之图相同，故省略之。	终结：a_1b_1，a_2b_2的联线 b_1c_1，b_2c_2的联线 c_1a_1，c_2a_2的联线 会于同一点L上。 图36

利用德沙格定理便可得到下面的定理：

定 理 （图37）	定 理 （图38）
假设：两个完全四点形$A_1B_1C_1D_1$及$A_2B_2C_2D_2$，A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2，D_1D_2会于同一点L。 终结：下列六点中，如有五点在一直线上，则第六点也在这直线上： A_1B_1，A_2B_2的交点 A_1C_1，A_2C_2的交点	假设：两个完全四线形$a_1b_1c_1d_1$及$a_2b_2c_2d_2$，a_1a_2，b_1b_2，c_1c_2，d_1d_2同在一直线l上。 终结：下列六线中，如有五线经过同一点，则第六线也过同一点： a_1b_1，a_2b_2的联线 a_1c_1，a_2c_2的联线

定　　理　（图37）	定　　理　（图38）
A_1D_1，A_2D_2的交点 B_1C_1，B_2C_2的交点 B_1D_1，B_2D_2的交点 C_1D_1，C_2D_2的交点 图37	a_1d_1，a_2d_2的联线 b_1c_1，b_2c_2的联线 b_1d_1，b_2d_2的联线 c_1d_1，c_2d_2的联线 图38

以上所举的例子都是投影几何学里的重要定理，我相信很多读者不一定念过。这些例子有两个特点：

第一、只要拿一条直尺，便可以作图，用不到圆规等。图形中都是过两点作一直线或作两直线的交点，对于喜欢作图的读者一定会觉得很美丽。

第二、这些定理中都没有度量的关系，过去我们所学的欧氏几何学的所有的定理都与长度和角度有关系。随便举一个例子来说，第一章里的毕达哥拉斯定理

一个直角三角形的直角的两夹边的平方和等于直角的对边的平方。

这个定理中说到有一个角是直角，以及三边的长度的关系。

又例如大家都知道的下面的定理：

一个等边三角形的三内角都相等。

这个定理中说到边的长度以及角的大小的关系。读者不妨任意找一个以前学过的定理，把长度和角度不论，看能不能成立。所以说欧氏几何学是研究度量的关系。自然，非欧派的几何学亦不例外。至于解析几何学更是离了长度和角度便无法计算的。本章所说的定理都没有长度与角度的关系，即是与度量无关。读者一定会问，这些定理究竟与什么有关呢？答案是"位置"。这些定理中只看见"某点在某直线上"或"某直线经过某点"等等，全是位置的关系，所以这种几何学又称为位置几何学。在下面我们将作有系统的研究。

IV 透视和射影

在前面我们已经讲过一些透视图形。现在要讲到最基本的透视关系。

1 点列和线束的透视关系

为了易于比较，列表如次：

点列的透视（图39）	**线束的透视**（图40）
在一平面（π）上任取一直线l_1。l_1上的点的全体称为一点列，l_1称为这点列的底线。 在（π）上任取另一直线l_2和不在l_1与l_2上之任一点P。	在一平面（π）上任取一点L_1。过L_1的直线的全体称为线束，L_1称为这线束的中心 在（π）上任取另一点L_2及不过L_1与L_2的任一直线p。

<table>
<tr><th>点列的透视（图39）</th><th>线束的透视（图40）</th></tr>
<tr><td>

l_1 上的点 A_1，B_1，C_1，D_1 …与 P 的联线 PA_1，PB_1，PC_1，PD_1，…各与L_2相交于 A_2，B_2，C_2，D_2，…等点。

A_4，B_1，C_1，D_1，…各依次和 A_2，B_2，C_2，D_2，…配成对。

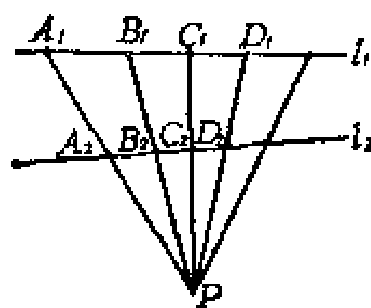


图39

由这种配对法，对于l_1上任一点[1] 在l_2上一定有一点与它配成对，也只有一点可以与它配成对。反之，在l_2上的点亦然。

用数学的话来说，l_1 上的点列与l_2上的点列成一对一的对应，这对应叫做成透视。P点称为透视中心。A_1，A_2互称为对应点，B_1，B_2亦互称为对应点…。

</td><td>

过 l_1 的直线a_1，b_1，c_1，d_1，…与p 的交点 pa_1，pb_1，pc_1，pd_1，…各与L_2相联成直线a_2，b_2，c_2，d_2，…

a_1，b_1，c_1，d_1…各依次和a_2，b_2，c_2，d_2…配成对。

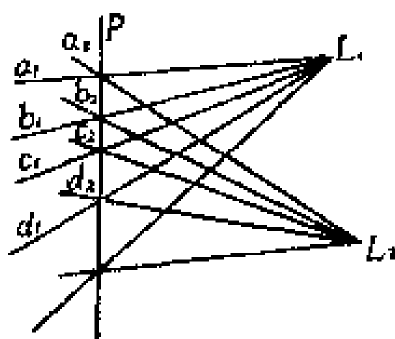


图40

由这种配对法，对于过 L_1 的任一直线一定有过 L_2 的一直线与它配成对，也只有一直线可以与它配成对[2]，反之，过L_2的直线亦然。

用数学的话来说，过L_1的线束与过L_2的线束成一对一的对应，这对应叫成透视。p直线称为透视轴。a_1，a_2互称为对应直线，b_1，b_2亦互称为对应直线…。

</td></tr>
</table>

现在谈到度量的关系，仍列表如次，

根据上面的讨论	根据上面的讨论
在l_1及l_2上各任取一方向为正方向（见图39）。在l_1上任取不同的二点A_1，B_1，在l_2上的对应点为A_2，B_2，以$\overline{A_1B_1}$记由A_1至B_1的长度，以$\overline{A_2B_2}$记由A_2至B_2的长度。很显然地，$\overline{A_1B_1}$和$\overline{A_2B_2}$不一定会相等。	在L_1及L_2周围各取一方向为正方向[3]。过L_1任取不同的二直线a_1，b_1， 以$\widehat{a_1b_1}$记由a_1转至b_1的角度， 以$\widehat{a_2b_2}$记由a_2转至b_2的角度。很显然地，$\widehat{a_1b_1}$和$\widehat{a_2b_2}$不一定会相等。
如果我们任取l_1上四点A_1，B_1，C_1，D_1，用$(A_1B_1,\ C_1D_1)$记 $\dfrac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1D_1}} \div \dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1D_1}}$．	如果我们任取过L_1的四直线a_1，b_1，c_1，d_1用$(a_1b_1,\ c_1d_1)$记 $\dfrac{\sin\widehat{a_1c_1}}{\sin\widehat{a_1d_1}} \div \dfrac{\sin\widehat{b_1c_1}}{\sin\widehat{b_1d_1}}$．
A_1，B_1，C_1，D_1的对应点依次是在l_2上的A_2，B_2，C_2，D_2．同样用$(A_2B_2,\ C_2D_2)$记 $\dfrac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2D_2}} \div \dfrac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_2D_2}}$．	a_1，b_1，c_1，d_1的对应直线依次是过L_2的a_2，b_2，c_2，d_2．同样用$(a_2b_2,\ c_2d_2)$记 $\dfrac{\sin\widehat{a_2c_2}}{\sin\widehat{a_2d_2}} \div \dfrac{\sin\widehat{b_2c_2}}{\sin\widehat{b_2d_2}}$．
定理 不管A_1，B_1，C_1，D_1如何取法，$(A_1B_1,C_1D_1)=(A_2B_2,C_2D_2)$。$(A_1B_1,C_1D_2)$称为$A_1$，$B_1C_1$，$D_1$四点的交比。	**定理** 不管a_1，b_1，c_1，d_1如何取法$(a_1b_1,c_1d_1)=(a_2b_2,c_2d_2)$．$(a_1b_1,c_1d_1)$称为$a_1$，$b_1$，$c_1$，$d_1$四直线的交比。

注解：①包括l_1及l_2上的无限远点在内。

②过L_1而平行于p的直线与过L_2而平行于p的直线配成对。

③假设你站在一点，我叫你转90°角，你一定无从转起，因为你可以向左转90°，也可以向右转90°，如果规定左转是正方向，那么向右转便是负方向。转90°是向左转90°。转一(负)90°是向右转90°。所以在一点有正负方向，正如一直线有正负方向一样。

交比是巴布士发见的，它在射影几何学里的地位正如距离在欧氏几何学里一样的重要。

2 射 影

为比较方便计，仍列表如次：

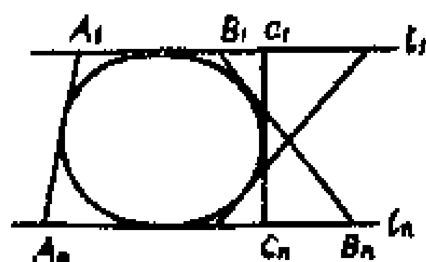
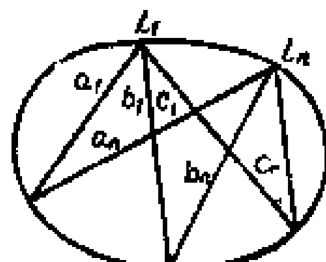
点　　　列　　（图41）	线　　　束　　（图42）
假设：l_1上的点列 A_1B_1，…和l_2上的点列A_2，B_2，…成透视（即A_1A_2，B_1B_2…会于一点），l_2上的点列 A_2，B_2…和 l_3上的点列 A_3，B_3…成透视（即A_2A_3，B_2B_3，…会于一点）如此下去… l_{n-1}上的点列A_{n-1}，B_{n-1}，…和l_n上的点列 A_n，B_n，…成透视 则A_1和 A_n可配成对，B_1和B_n可配成对。… 这种对应是一对一的，称为射影对应。或者说由l_1上的点列A_1，B_1，…经射影变动变成在l_n上的点列A_n，B_n…	假设：过L_1的线束a_1，b_1，…和过L_2的线束 a_2,b_2,…成透视（即a_1a_2，b_1b_2，…在一直线上），过L_2的线束a_2,b_2，…和过L_3的线束a_3，b_3，…成透视（即a_2a_3，b_2b_3，…在一直线上），如此下去… 过L_{n-1}的线束a_{n-1}，b_{n-1}，…和过L_n的线束a_n，b_n…成透视。 则a_1和a_n可配成对，b_1和b_n可配成对，… 这种对应是一对一的，称为射影对应。 或者说由过L_1的线束a_1,b_1，…经射影变动变成过L_n的线束a_n,b_n，…
图41	图42

读者也许会头痛了，为什么经了这样多次的透视，仍然是一对一的。让我来讲一个笑话：假设有这样一个城市，世世代代每一个父亲只有一个儿子，那么可以断定每一个祖父只有一个孙子，每一个曾祖父只有一个重孙，……不管传了多少代我们都可以说："每一个……只有一个……。"反过来，自然用不着说每一个儿子只有一个父亲，每一个孙子只有一个祖父，……。合并起来便可以说不管传了多少代，第一代和第 n 代都是一对一的。

下面是射影对应下的点列及线束的关系：

点　　　　列	线　　　　束
假设：l_1，l_n为一平面(π)上的二直线，l_1上的点列A_1, B_1, C_1，……经过一个射影变动得到l_n上的点列A_n，B_n，C_n，… 很显然地，$\overline{A_1B_1}$不一定等于$\overline{A_nB_n}$。但是任取l_1上的四点A_1，B_1，C_1，D_1， 则$(A_1B_1, C_1D_1)=(A_2B_2, C_2D_2)$， $(A_2B_2, C_2D_2)=(A_3B_3, C_3D_3)$， …………………… $(A_{n-1}B_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1})=(A_nB_n, C_nD_n)$ 所以$(A_1B_1, C_1D_1)=(A_nB_n, C_nD_n)$。 因此得到下面的结论定理：一点列中任何四点的交比在射影变动之下是不变的。	假设：L_1，L_n为平面(π)上的二点，过L_1的线束a_1, b_1, c_1，…经过射影变动得到过L_n的线束a_n，b_n，c_n，…… 很显然地，$\widehat{a_1b_1}$不一定等于$\widehat{a_nb_n}$。但是任取过L_1的四直线a_1，b_1，c_1，d_1， 则$(a_1b_1, c_1d_1)=(a_2b_2, c_2d_2)$， $(a_2b_2, c_2d_2)=(a_3b_3, c_3d_3)$ …………………… $(a_{n-1}b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1})=(a_nb_n, c_nd_n)$ 所以$(a_1b_1, c_1d_1)=(a_nb_n, c_nd_n)$。 因此得到下面的结论定理：一线束中任何四直线的交比在射影变动之下是不变的。

下面讨论圆锥曲线：

二　阶　曲　线（图43）	二　次　曲　线（图44）
假设l_1，l_n为一平面(π)上的两直线，l_1上的点列A_1，B_1，C_1，…经过一射影变动得到l_n上的点列A_n，B_n，C_n，…。联A_1A_n，B_1B_n，C_1C_n，…这些直线的线坐标(u_1，u_2，u_3)都适合于第四章第II节3款中的一个二次方程式。 即是A_1A_n，B_1B_n，C_1C_n，…都切于一个圆锥曲线。	假设L_1，L_n为一平面(π)上的两点，过L_1的线束a_1，b_1，c_1，…经过射影变动得到L_n上的线束a_n，b_n，c_n，…。作a_1a_n，b_1b_n，c_1c_n，…这些交点的点坐标(x_1，x_2，x_3)都适合于第四章第I节6款中的一个二次方程式。 即是a_1a_n，b_1b_n，c_1c_n，…都在一个圆锥曲线上。
	
图43	图44

由此，圆锥曲线的性质又可以用射影几何学来研究了。

V　巴斯卡定理和布良雄定理

下面是两个非常美丽的对偶定理：

巴斯卡定理（图45）	布良雄定理（图46）
定理：假设在一个圆C上面任取六点，不妨称之为第一，二，三，四，五，六点。	定理：假设在一个圆C上任取六条切线，不妨称为第一，二，三，四，五，六条切线。
则下面的三交点在同一直线上：	则下面的三直线会于一点：
过第一，二点的直线与过第四，五点的直线的交点。	过第一，二切线的交点与过第四，五切线的交点的直线。
过第二，三点的直线与过第五，六点的直线的交点。	过第二，三切线的交点与过第五，六切线的交点的直线。
过第三，四点的直线与过第六，一点的直线的交点。	过第三，四切线的交点与过第六，一切线的交点的直线。
所得的这根直线叫巴斯卡直线。	所得的这一点叫布良雄点。
例如：在圆C上任取六点A，B，C，D，E，F。	例如，在圆C上任取六切线a，b，c，d，e，f。
把A，B，C，D，E，F各作为第一，二，三，四，五，六点。	把a，b，c，d，e，f各作为第一，二，三，四，五，六条切线。
则下面的三个交点在一直线l上：	则下面的三直线会于一点L，
（图45）	（图46）
AB与DE的交点	过ab与de的直线

巴斯卡定理（图45）

BC与EF的交点

CD与FA的交点

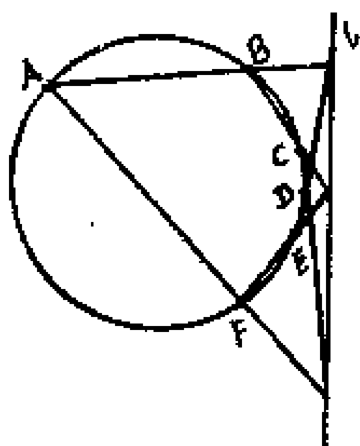


图45

又例如：把B，A，C，D，E，F各作为第一，二，三，四，五，六点。

则下面的三交点在一直线l_1上：

（图47）

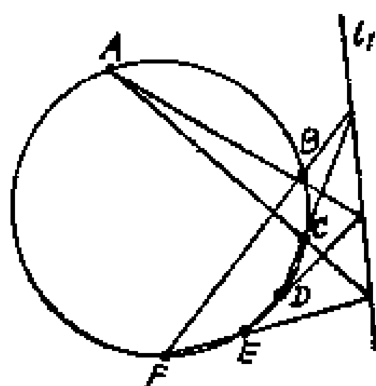


图47

布良雄定理（图46）

过bc与ef的直线

过cd与fa的直线

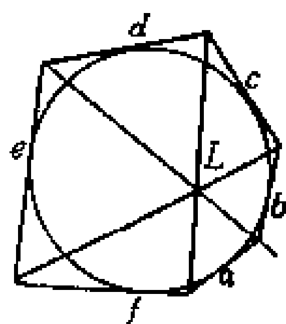


图46

又例如：把b，a，c，d，e，f各作为第一，二，三，四，五，六点。

则下面的三直线交在一点L_1上：

（图48）

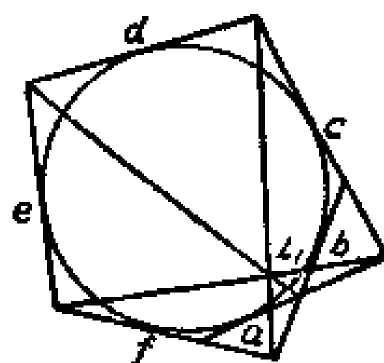


图48

巴 斯 卡 定 理（图45）	布 良 雄 定 理（图46）
BA与DE的交点 AC与EF的交点 CD与FB的交点 值得特别注意的是l和l_1是不同的二条直线。如果把上面的六点排列成别的次序，又可以得到不同的巴斯卡直线。由同样的六点，总共可以得出六十条不同的巴斯卡直线。这六十条直线又可分成十五组，每组的四条直线会于一点，共十五点。这十五点又有许多关系…。 全体称为巴斯卡图形。	过ba与de的直线 过ac与ef的直线 过cd与fb的直线 值得特别注意的是L和L_1是不同的二点。如果把上面的六切线排列成别的次序，又可以得到不同的布良雄点。由同样的六切线，总共可以得出六十个不同的布良雄点。这六十点又可分成十五组，每组的四点在一直线上，共十五条直线。这十五条直线又有许多关系…。 全体称为布良雄图形。

对作图有兴趣的读者，不妨用一张大纸，把上面的点、线全体作出来，真是壮观极了。

上面的两个定理中的“圆”改为“圆锥曲线”仍然成立。原来的巴斯卡定理和布良雄定理都是关于圆锥曲线的。圆只不过是圆锥曲线的特例而已，但是我特别举出圆的例子，是因为读者们对圆最熟悉。

这两个定理可写成一本书，其变化之多可以想见了。

巴斯卡定理的圆锥曲线如果退化成二条直线，便得到巴布士定理。 巴斯卡定理中的六点A，B，C，D，E，F，如果有两点重合，例如A与B重合，过A与B的直线便成了A点的切线，巴斯卡定理仍然成立。	布良雄定理中的圆锥曲线如果退化成二点，便得到巴布士定理的对偶定理。 布良雄定理中的六条线a，b，c，d，e，f，如果有两条线重合，例如a与b重合，a与b的交点便成了a的切点，布良雄定理仍然成立。

关于圆锥曲线的很多的美丽的性质，因限于篇幅，只有割爱了。

VI 空间的射影

在空间任取二平面(π)与(π')，和不在(π)与(π')上的任一点P(图49)。在(π)上任意画一个图形F,此F上的每一点A和P联一直线，然后与π'交于点A';这些交点A'在π'上组成一个图形F'。F和F'叫成透视，A与A'互称为对应点。我们要找出F与F'有些什么共同的地方：

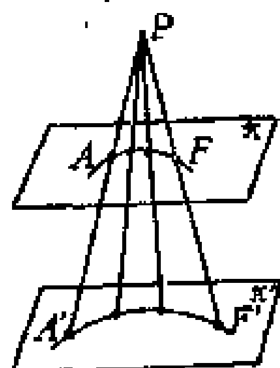


图49

如果F是一直线，F'也是一直线；F经过一点A，F'也经过一点A'(A的对应点)。

这两句话很简单，但有很大的意义；假设(π)即是第II节与第III节中的(π)，假设F是巴布士定理的图形(参看第II节中的图29)；即是三条直线$l_1l_2l_3$上各有三点A_1,A_2,A_3；B_1,B_2,B_3；C_1,C_2,C_3。下面每一组的三点在一直线上：

$A_1B_2C_3$，$A_1B_3C_2$，$A_2B_1C_3$，$A_2B_3C_1$，$A_3B_1C_2$，$A_3B_2C_1$

把F经过透视方法得到在(π')上的对应图形F'。F'也包括三直线l'_1，l'_2，l'_3。其上各有三点A'_1，A'_2，A'_3；B'_1，B'_2，B'_3；C'_1，C'_2，C'_3。下面每一组的三点在一直线上：

$A'_1B'_2C'_3$，$A'_1B'_3C'_2$，$A'_2B'_1C'_3$，$A'_2B'_3C'_1$，$A'_3B'_1C'_2$，$A'_1B'_2C'_3$。

所以F和F'有很多相同的地方。第II节与第III节中所有的平面(π)上的图形经过透视，在(π')上也得到相同的图形，换句话说：(π)上的这些图形经过透视仍然是不变的。

但有些什么东西变了呢？假设在(π)上作一个等边三角形

ABC，经过透视便得到（π'）上的对应的$\triangle A'B'C'$（图50），$\triangle A'B'C'$便不再是等边三角形，三内角也不再相等了。所以长度和角度都有改变。第II节与第III节中的图形都没有提到长度和角度，所以不受到影响。

假设在(π)上取一个圆作F，在(π')上的对应图F'不再是一个圆了；而是第二章第III节中图四，五，六，七所示的圆锥曲线。换句话说：即是(π)上的圆经过透视改变了。但是(π)上的图形为圆锥曲线时，经过透视在(π')上仍是圆锥曲线。所以圆锥曲线经过透视是不变的。

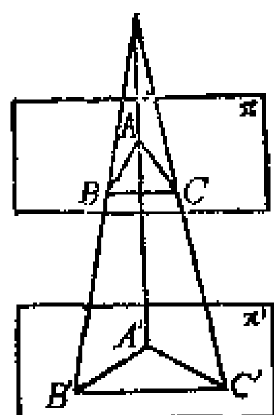


图50

假设读者喜欢计算，在(π)上任取同一直线l上的四点A，B，C，D。在(π')上的对应图形是同一直线l'上的四点A'，B'，C'，D'，而且$(AB,\ CD)=(A'B',\ C'D')$。所以交比经过透视是不变的。

在空间取平面(π_1)，(π_2)，(π_3)，……(π_n)。任取点P_1，P_2，P_3……P_{n-1}。但P_1不在(π_1)与(π_2)上，P_2不在(π_2)与(π_3)上，……P_{n-1}不在(π_{n-1})和(π_n)上。在(π_1)上任取一个图形F_1，由P_1透视F_1到(π_2)上得F_2，由P_2透视F_2到(π_3)上得F_3……P_{n-1}透视F_{n-1}到(π_n)上得F_n。F_1和F_n称为成射影，或者说F_1经射影变换得F_n。射影几何学便是研究F_1和F_n的相同之处，或者说研究经射影变换后图形的不变的性质，这些性质叫射影性质。下面是一些射影性质：

交比、直线、点、圆锥曲线等等。圆锥曲线又可以由这一个观点去研究。

VII 仿射几何学

如果取(π_1)，(π_2)，$(\pi_3)\cdots(\pi_n)$都是平行的平面，则由(π_1)得到(π_n)称为仿射变换。研究经仿射变换后图的不变的性质叫做仿射几何学。仿射几何学中(π_1)上的无限远直线变成(π_n)上的无限远直线。所以无限远直线是不变的。两平行线可以看作交于无限远直线上的一点，经过仿射变换之后，所得到的二直线的交点仍在无限远直线上；所以这二直线仍是平行的。故平行线在仿射几何学中是不变的。其他所有的射影性质经仿射变换后亦不变。例如直线经仿射变换后仍然是直线等等。

VIII 画法几何学

画法几何学，过去又称投影几何学，是蒙日创造的，它与射影几何学并没有多少关系；但因为中文的译名很相象，所以附带的说一说。画法几何学是工程上用的工具，譬如要画一座房子(图51)，我们可以由正面、侧面、顶上画出各个图的样子。利用这三个图形，便可以把立体的房子表示在平面上；看的人必须有相当的训练，才会想到这三个图形合起即成一座立体的房子。普通的蓝图，就是只画出这三图而不会画出整个房子的图形的。工程师们天天看见的就是这种图形。

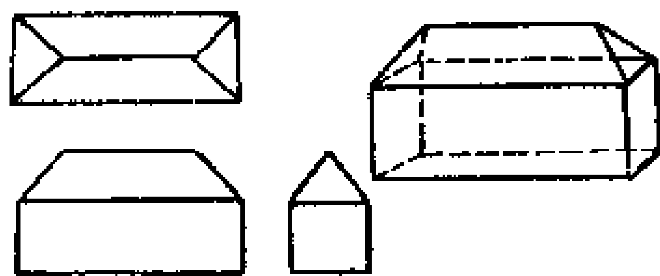


图51

IX 非欧几何学

在本节中我们要从另一个观点去看非欧几何学与欧氏几何学的关系。

1 罗氏几何学

在平面(π)上任取一点O，以O为圆心，大于零的实数r为半径，作一个圆C（图52）。在圆C内任取二点P，Q。过P，Q作一直线l与圆C交于两点R_1，R_2。假设l上的正方向是由R_1到R_2。

设 $(PQ,\ R_1R_2)=\dfrac{\overline{PR_1}}{\overline{PR_2}}\div\dfrac{\overline{QR_1}}{\overline{QR_2}}$。

设 $d(PQ)=\dfrac{r}{2}\log(PQ,\ R_1R_2)$

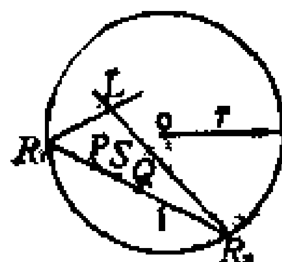


图52

$d(PQ)$有下面的性质：

1) $d(PQ)=-d(QP)$。 (1)

2) 假设S在PQ线段上，则

$$d(PQ)=d(PS)+d(SQ)。\quad (2)$$

3) 假设P与Q重合，则$d(PQ)=0$。 (3)

反之，假设$d(PQ)=0$，则P与Q重合。

4) 假设P点固定，Q点沿l移到R_1或R_2时，$d(PQ)$变成无限大。

现在我们幻想一种动物居住在圆C内，幻想圆C内各点的温度不均匀，由于热胀冷缩的影响，使得这种动物用来测量距离的尺子本身长度在各点都不相同。可是这种动物自己的身长也受到了热胀冷缩的影响，与他所用的尺子成正比地胀长缩短。

因此，当这动物带了尺子在圆内作测量时，他既不能发觉他用的尺子在胀缩，也不发觉他自己的身长在胀缩。

由于这种动物的尺子的本身长度随地而异，他由圆内的一点P量到圆内另一点Q所得的结果，便和我们局外人用长度不会变的尺子由P量到Q所得的结果不相同了。我们量得的结果即是PQ之长，这种动物所量得的结果，假设为$d(PQ)$。我们来看，依他的量法得到些什么：

1) $d(PQ)=-d(QP)$表示由P量到Q与由Q量到P的结果是长短相等，方向相反。

2) S在PQ上，则$d(PQ)=d(PS)+d(SQ)$。这表示由P量到Q之长等于由P量到S之长加上由S量到Q之长。

3) P与Q重合，则$d(PQ)=0$；$d(PQ)=0$，则P与Q重合。这表示如两点重合，则其距离为零；反之，两点的距离为零，则此两点重合。

这种动物所量得的上面的三种结果，都与我们局外人所用的不会变的尺子所量得的结果相同，但下面的第四点却不相同了。

4) 如果Q沿l跑到R_1或R_2时，$d(PQ)$变成无限大；所以这种动物觉得R_1和R_2是l上的两个无限远点，他永远走不到R_1和R_2。可是我们看来，PR_1和PR_2都是有限的长度。

这一小点差异，使得这种动物所量得的几何学是属于罗氏一派。在圆C内任取不在l上的一点L，联结LR_1及LR_2两直线。因为R_1及R_2是在无限远处，所以LR_1和LR_2都是l的平行线，于是过L可以作l的两条平行线了。

在圆C上任取一点T。由T作二条线段p和q(图53)。以pq记p与q在T点所成的角。由前章第III节的讨论，过T可作圆C的二条切线r_1和r_2(都是虚线)。

设 $(pq,\ r_1r_2)=\dfrac{\sin\widehat{pr_1}}{\sin\widehat{pr_2}}\div\dfrac{\sin\widehat{qr_1}}{\sin\widehat{qr_2}}$

$$\theta(pq)=\frac{i}{2}\log(pq,\ r_1r_2)$$



图53

$\theta(pq)$有四个性质：

1) $\theta(pq)=-\theta(qp)$。

2) 设S为经过T的一直线，则$\theta(pq)=\theta(ps)+\theta(sq)$。

3) 设p与q重合，则$\theta(pq)=0$；反之，设$\theta(pq)=0$，则p与q重合。

4) 如p，q相交于O；则$\theta(pq)=\widehat{pq}$。

如p，q不相交于O；则$\theta(pq)$不一定等于$\widehat{pq}$。

现在我们假定这种动物测出由p到q的角度是$\theta(pq)$，他对于角度的测量有下面的结果：

1) $\theta(pq)=-\theta(qp)$，即是由p到q的角度和由q到p的角度，大小相等，方向相反。

2) p，q，S都交于T，则$\theta(pq)=\theta(ps)+\theta(sq)$，即是由$p$到$q$的角等于由$p$到$s$的角加上由$s$到$q$的角。

3) 设p与q重合，则$(pq)=0$，即是由p到q的角等于零。反之，$\theta(pq)=0$，即由p到q的角为零，则p与q重合。

上面三点和我们对于角的测量所得的结果是一样的，下面一点却有了差异。

4) 如果这动物在圆心O点测量度数，所得的结果与我们测得的结果相同。如果不在O点测量时，与我们所得的结果便不一定相同了。

这种动物的几何学和我们的几何学有很多相同之点，譬如一个三角形的三边相等则三角相等。

假设这种动物在圆内作一个他所认为的“等边三角形”

OVU，其中一个顶点在圆心O。虽然由我们的观点看来，OU和OV是同样长，VU却要短些①。但是这种动物的尺子在离圆心O越远的地方便越缩得短，因此他认为VU是和OU、OV同样长的。$\triangle OVU$既然是他认为的"等边三角形"，所以三内角相等，$\triangle OVU$的三内角之和便等于三倍的$\theta(uv)$；u，v各代表OU及OV二直线。但是根据上面第4项，$\theta(uv)$等于，$\widehat{uv}$，即是等于$\angle UOV$。所以"等边三角形"OVU的三内角之和等于三倍的$\angle UOV$。

现在回到我们平常的欧氏几何学来。因为$OV=OU>UV$，

$\therefore\quad \angle UOV<\angle UVO=\angle VUO$。

$\therefore\quad 3\angle UOV<\angle UOV+\angle UVO+\angle VUO=$两直角。

即是$3\theta(uv)<$两直角。

结论：在这种动物的几何学中，$\triangle OVU$的三内角之和小于两直角。

这种动物所得到的几何学实在是罗氏几何学。

2 黎氏几何学

在平面(π)上取一圆心为O，半径为ir的虚圆C（r是不等于零的实数），在(π)上任取二点P,Q。过P,Q作一直线l，与C交于二点R_1及R_2（都是虚点）。

设 $$(PQ,R_1R_2)=\frac{\overline{PR_1}}{\overline{PR_2}}\div\frac{\overline{QR_1}}{\overline{QR_2}},$$

$$d(PQ)=\frac{ir}{2}\log(PQ,R_1R_2),$$

$d(PQ)$有下面的性质：

注解：①离圆心越远，这种动物的尺子便越短。所以他认为OV和UV一样长，我们看起来UV要短些（见图53）。

1) $d(PQ) = -d(QP)$。

2) 如果S在PQ上，则$d(PQ) = d(PS) + d(SQ)$。

3) 如果P与Q重合，则$d(PQ) = 0$。如果$d(PQ) = 0$，则P与Q重合。

4) 如果假设P固定，Q沿l跑到无限远点去，$d(PQ)$便等于$\frac{\pi r}{2}$或$-\frac{\pi r}{2}$。正号或负号由Q沿l的正方向或负方向跑去而定。

假设有一种动物生存在这平面上，因这平面上各点的温度不同，他用来量距离的尺子的本身也受热胀冷缩的影响而变化。假设他由P量到Q所得的结果是$d(PQ)$，它对于长度的测量也有四个结果。第一，二，三个结果和前款中的相同。现在只说第四个结果。

4) 由一点P量到任何一无限远点的距离都是一定长$\frac{\pi}{2}r$或$-\frac{\pi}{2}r$。正负号表示正负方向。所以这种动物的平面上，任何一直线都是有限长度，虽然可以沿一直线继续的前进。这种动物的直线便是象球面上的圆一样。由我们看来由P点量到无限点的距离是无限大的。

这一点的差异使得这种动物的几何学属于黎氏一派。

过(π)上一点T作两条直线p，q。由T作C的两切线r_1和r_2。

设 $$(pq, r_1r_2) = \frac{\sin \widehat{pr_1}}{\sin \widehat{pr_2}} \div \frac{\sin \widehat{qr_1}}{\sin \widehat{qr_2}},$$

$$\theta(pq) = \frac{1}{2}\log(pq, r_1r_2).$$

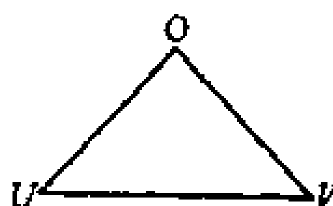


图54

$\theta(pq)$有四个性质如前款中的$\theta(pq)$一样。假设这种动物测量角度的结果是$\theta(pq)$，他也有同样的四项结果。

这种动物的几何学中也有这个定理，

三角形的三边相等，则三内角亦相等。

假设这动物作他所认为的"等边三角形" OUV(图54)。我们看来 $OU=OV$，但是 UV 要长些①。所以我们得到

$$OU=OV<UV,$$

所以 $\angle OVU=\angle OUV<\angle UOV$。

所以 $3\angle UOV>\angle OVU+\angle OUV+\angle UOV=$ 两直角但是 $3\angle UOV$ 等于这种动物的"等边三角形" OUV 的三内"角"之和，于是得到下面的结论。结论：在这种动物的几何学中，$\triangle OUV$ 的三内角之和大于两直角。

所以这种动物的几何学实在是黎氏几何学。

3　三种几何学的统一性

在本节1款及2款中圆 C 的 r，若让它变成无限大，则 $d(PQ)$ 便等于我们平常的 $\overline{PQ}$，$\theta(pq)$ 便等于我们平常的 $\widehat{pq}$。即是说当 r 变成无限大时，前两款中的两种几何学都变成了欧氏几何学。

用K 表示 $\dfrac{-1}{\text{圆}C\text{的半径的平方}}$。在本节1款中的圆 C 的半径等于 r，所以 $K=\dfrac{-1}{r^2}$，小于零。在本节2款中的圆 C 的半径等于 ir，所以 $K=\dfrac{-1}{(ir)^2}=\dfrac{1}{r^2}$，大于零。让 r 变成无限大，K便等于零。所以用K来分别三种几何学，便得到下面的结论：

$K<0$，所得的几何学是罗氏几何学。

$K=0$，所得的几何学是欧氏几何学。

$K>0$，所得的几何学是黎氏几何学。

这三种几何学又从高级的观点统一起来。

注解①离O点越远，尺子越胀长。

至于K有什么几何的意义，下一章再说了。

这一章的结尾，我要指出本节1款及2款中用 (PQ, R_1R_2) 及 (pq, r_1r_2) 交比来定 $d(PQ)$ 和 (pq)。但 (PQ, R_1R_2) 及 (pq, r_1r_2) 都是射影性质，所以由射影几何学可以研究这三种几何学。因此，英国数学家克勒曾说："所有的几何学都是射影几何学。"但是，客观世界是如此地丰富，我们还要看到几何学丰富多采的发展。

第六章　微分几何学

I　微分几何学的对象

微积分是德国的来布里慈和英国的牛顿发明的[注]。利用微积分来研究几何学，便是微分几何学。有了这种新的方法，几何学的研究便不只限于直线、圆锥曲线、球面等；而可以讨论到一般的曲线和一般的曲面。

II　曲线的几何学

1　平面上的曲线

在一平面(π)上任取一曲线K。在K上任取一点P，和另一点Q（图55）。l为联PQ两点的直线，当Q沿K跑到P点时，l转到的位置便称为K在P点的切线。过P作此切线的垂直线称为K在P点的法线。

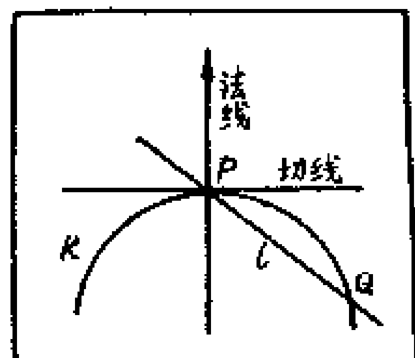


图55

例一　如果K是一条直线，K上每一点的切线即是K。K上每一点的法线即是K在该点的垂线。

[注]没有学过微积分的读者，可以参看作者的《从算术到常微分方程》一书，（1979年湖南人民出版社）

例二　如果K是一个圆，K上每一点的法线即为圆心和该点的联线。该点的切线即为过该点而与该点的法线垂直的直线。

在K上任取一方向作正方向(图56)。K上任一点P的切线和法线的正方向，以下面所述而定：

假设有一个人在K上向正方向前进，当他走到P点时，他面对的方向即为P点的切线的正方向。他右手向右侧平伸的方向，便算是P点的法线的正方向。

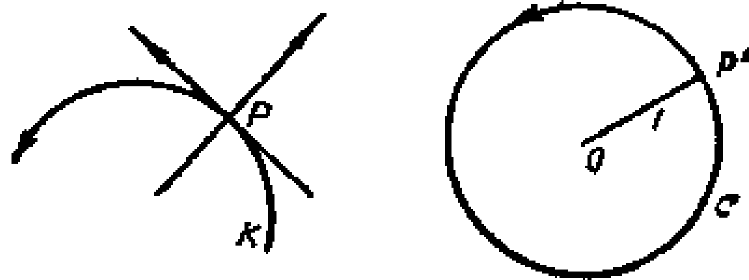


图56

在平面(π)上取一个以O为圆心，半径等于1的圆C(图56)。C上的正方向，规定为与时钟所走的方向相反。由O作一直线平行于P点的法线的正方向，与圆C交于P'点。P'算作K上的P点在圆C上的代表点。依此方法，K上的每一点在C上都有一代表点，也只有一代表点。这里特别声明，C上的点不一定都是K上的点的代表点，C上的每一点也不一定只代表K上的一点。如果读者想不清这几句话，我可以作一个比喻：假设一个学校的每一级学生都指定一个代表在一起开会，那么每个学生都一个人代表他，也只有一个人代表他。可是一个代表不一定只代表一个学生，他代表的是一级人；如果这级人有n个，他便代表n个人。但是到会的不一定都是学生代表，也许有先生参加指导。

现在假设有甲乙两人，甲在K上走，乙在C上走；但乙所在的C上的点，必须是当时甲所在的K上的点的代表点，这样乙的行动便由甲的行动而决定。当甲经过K上的P点时，乙便经过C

上的P的代表点P'点，当时乙的速率与甲的速率之比便叫做K在P点的曲率，即是表示K在P点的弯曲情形。下面举两个例：

例一 假设K是一条直线，K上任一点P的切线即为K自己（图57），K上任一点的法线即为与K垂直的直线，这些垂线互相平行。所以K上所有的点在圆C上的代表都是同一点P'。因此甲在K上走时，乙站在C上的P'点上不动。所以乙的速率总是等于零。故K在每一点P的曲率便是等于零。

结论：一直线的每点的曲率都是零。

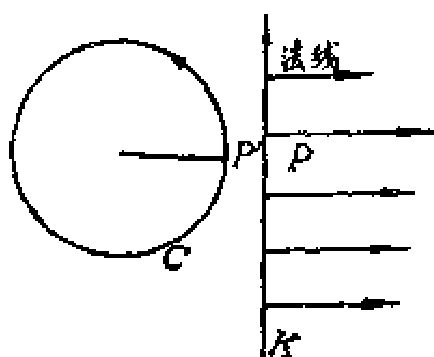


图57

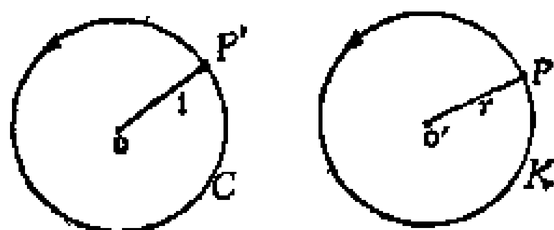


图58

例二 假设K是一个半径等于r的圆。圆心在O'点（图58）。又取K上的正方向与时钟走的方向相反。P为K上任一点，$O'P$便是P点的法线，由O到P算是法线的正方向。作OP'平行于$O'P$，P'便是K上的P在C上的代表点。因此甲在K上所走过的圆弧所对的圆心角，等于乙在C上所走过的圆弧所对的圆心角。圆心角相等，所对的圆弧的比例便等于半径的比例。乙在C上所走的弧与甲在K上所走的弧的比例，便等于圆C和圆K的半径的比例。而圆C的半径为1，圆K的半径为r，甲与乙同时所走的路程之比总是$1:r$，所以甲与乙在每一点的速率的比例也是$1:r$。

结论：半径等于r的圆K的每一点的曲率都是$\frac{1}{r}$。如果K上的正方向改变，C的正方向始终不变，圆K上每一点的曲率都是$-\frac{1}{r}$。

普通一条曲线K上的曲率不一定每点相等。计算时必须用微分的方法，此地不能多举了。

在一条曲线K上任取一点O，任取一方向作正方向。曲线K的每一点都可以由O去决定，与第四章第I节1款中直线上的情形相仿。例如P是K上任一点，由O沿K到P的长度为S。S可以为正长度，表示由O沿K的正方向走S便到P。S也可以为负长度，表示由O沿K的负方向走$-S$便到P。S也可以为零，即表示O点。有了S便知道K上P点的位置，有了P点便可以计算K在P点的曲率。所以有了S便可以得到一个曲率，用$R(S)$记这曲率，表示与S有关系，下面是一个很重要的定理：

定理： 假设在一平面(π)上有两条曲线C_1及C_2（图59）。C_1上有一点O_1，由O_1沿C_1量S到一点P_1。C_1在P_1点的曲率以$k_1(S)$记之。C_2上有一点O_2，由O_2沿C_2量S到一点P_2。C_2在P_2的曲率以$k_2(S)$记之，对于任何的S，$k_1(S)$和$k_2(S)$都相等。终结：把O_1和O_2叠合，C_1的正方向和C_2的正方向叠合，则C_1和C_2便全部叠合。反之亦成立。



图59

这个定理的证明已经不是本书的范围。但是，我可以简单地说一说它的重要性。第四章里叙述过，解析几何学的方法必须先取坐标系统，不同的坐标系统下同一个曲线的方程式便不同了。现在所讲的S和$k(S)$只与曲线的本身的开始计算点、正方向、弯曲三件事有关系，与所取的坐标系统无关。若知道了$k(S)$便可以作出很多条曲线。这些曲线都可以互相叠合。

曲率在工程技术上很有用。例如火车转变的地方，曲率半径如果过小，亦即曲率如果过大，则转变的速度必须减慢，否则便会有火车出轨的危险。又例如，飞机俯冲时，如果飞行轨迹的曲率过大，则飞行员会产生头昏甚至失去知觉的危险。微分几何的用处很多，下面还会谈到。

2 空间的曲线

在空间中任取一曲线C_1(图60)，C_1上任取一点O_1,C_1上任意定一正方向，对于任意的距离S,都可以由O_1沿C_1量S便得到一点P_1。在P_1点可以由C_1的弯曲情形决定两个数，一个叫曲率，以$K(S)$记它；另一个叫挠率，以$\tau(S)$记它，$k(S)$和$\tau(S)$的定义在此地不能细说。不过它们都只与C本身的样子有关，与



图60

所取的坐标无关。下面的定理和平面定理很相似。

定理：假设空间有两条曲线C_1及C_2。C_1及C_2上各有一点O_1及O_2。O_1及O_2上各有一正方向，对于任何的S都可以由O_1沿C_1量S到P_1点，C_1在P_1点的曲率和挠率各以$k_1(S)$及$t_1(S)$记之。由O_2沿C_2量到P_2点，C_2在P_2点的曲率及挠率各以$k_2(S)$及$\tau_2(S)$记之。再假设对于任何的S，$k_1(S)$和$\tau_1(S)$都各等于$k_2(S)$及$t_2(S)$。终结：把O_1及O_2叠合，C_1的正方向和C_2的正方向叠合，则C_1和C_2便全部叠合。反之亦成立(图60)。

III　曲面的几何学

三度空间里的曲面的几何学是初等微分几何学里最有趣的部分，下面分段述之。

1　曲面上的距离与角

假设有一个曲面S(图61)。S上任取二点P和Q，由P在S上走到Q的路径是数不清地多，但是在一般情形下，最短的路径只有一条，叫做由P至Q的测地线。

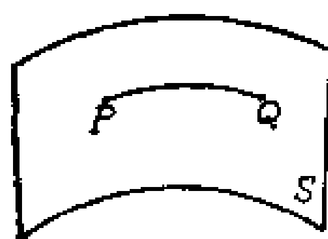


图61

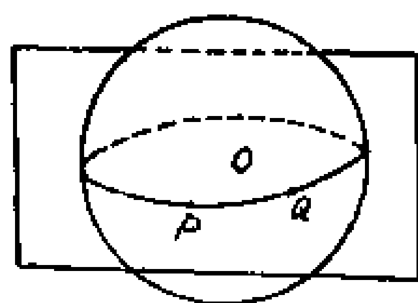


图62

测地线的得名，系由于航海人员在地球上由一地航行到另一地所采取的最短路线。如果我们是生活在一个平面上，两地间的最短路线便是一条直线。如果我们是生活在一个完整的球面上(图62)，两点PQ间的最短路线可以用下法作出：

过球心O和P、Q可以作一张平面，也只可以作一张平面，这张平面与球面相交得一个圆；P、Q都在这圆上。所以P、Q把这圆分成两个弧，其中较短的一个弧便是由P到Q的最短路径，这个圆叫球面上的大圆。可惜我们的地球表面既不是

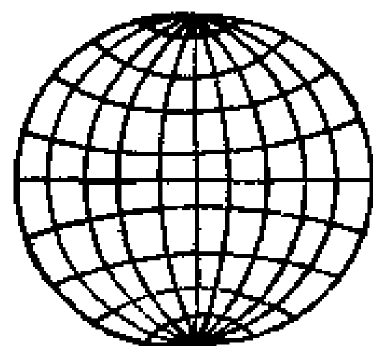


图63

平面，也不是一个规规矩矩的球面，而是一个橘子的形式(图63)。由一点到另一点的最短路线，便成了航行上的一个很重要的问题。测地线即由此得名。

一曲面 S 上的测地线和平面上的直线有很多相象的地方。例如一般情形下过S上两点P和Q必有一条测地线，也只有一条测地线；它是P和Q间最短的路径。因此在曲面上的几何学里，我们用测地线来作基本的研究对象，正如在平面上的几何学里的直线一样。曲面上的三角形便是三点A、B、C和过其中每两点的三条测地线所组成的图形(图64)。为了易于分别，称为测地三角形。曲面S上任两点P与Q的距离便是指这最短路径的长度。

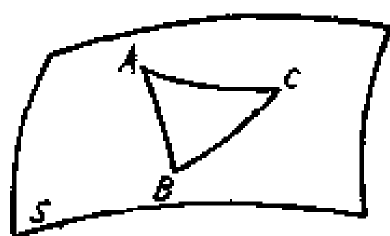


图64

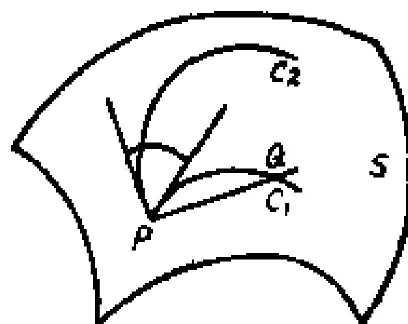


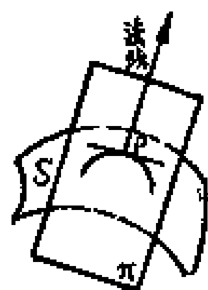
图65

现在我们谈到角。在S上任取两条曲线C_1及C_2，假设P点是C_1及C_2的一个交点；在C_1上任取一点Q，作直线经过P及Q(图65)，当Q沿C_1跑到P点时，直线PQ所转到的位置便是C_1在P点的切线。同样我们可以作C_2在P点的切线。这两条切线都过P点。我们知道，在空间里已知两条相交的直线，便可以作一平面包含此两直线，而且也只能作这样的一平面。这两条切线便是在这平面上的相交的直线。这两直线相交所成的角便算是C_1及C_2在P点所交成的角。

有了两点的距离及两线的交角定义，我们便可以研究曲面上的几何学了。

2 高斯曲率

在一曲面S上任取一点P。过P任取S上的一曲线C。作C在P点的切线。这种C不只一条，这种切线也不只一条。这些切线的全体组成一张过P点的平面(π)，称为曲面S在P点的切平面。过P点作一直线垂直于平面(π)，这条垂线称为曲面S在P点的法线。假设一个人站在这切平面上，与曲面S不在切平面的同一边，这个人由脚到头的方向便算是法线的正方向(图66)。在



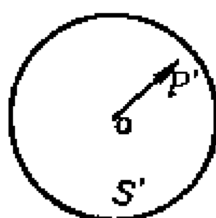


图66

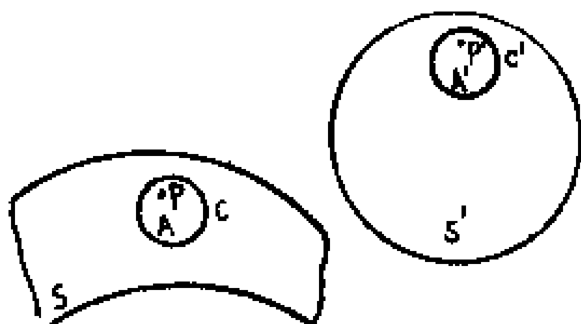


图67

空间取一个球心在O点，半径为1的球面S'，由球心作一半径平行于P点的法线的正方向(如图66)，以P'记这半径的端点，P'称为曲面S上的P点在球面S'上的代表点，S上任一点在S'上一定有一个代表点，也只有一个代表点。反之，S'上的每一点不一定都代表S上的一点，可以代表很多点，也可以一点都不代表。

在S上P的周围随便画一个小圈C，把P包在内(图67)。C上各点的代表点在S'也组成一个小圈C'，把P'包在内。C所包围的S上的面积以A记之，C'所包围的S'上的面积以A'记之。A及A'有同方向与反方向的区别，其决定法如次：

假设有两个人甲和乙，甲在S上，甲由脚至头的方向总是甲所在点的法线的正方向(普通我们站在地球上，由脚至头的方向便是我们所站之点的法线的正方向)，乙在S'上，乙由脚至头的方

向总是乙所在点的法线的正方向。甲在C上走，乙也始终走在甲的所在点在S'上的C'的代表点上。甲绕C一周，乙便绕C'一周，当甲绕C时，C的内部始终在甲的左边或始终在甲的右边（普通，假设在地上画一个圆，当你沿着圆跑时，圆的内部始终是在你的左边或始终在你的右边，便是同样的情形）。C'的内部也始终在乙的一边，如果C的内部在甲的左边，同时C'的内部也在乙的左边；或C的内部在甲的右边，同时C'的内部也在乙的右边。我们说A和A'有同方向，$\frac{A'}{A}$便是正数。反之，如果C的内部在甲的左边，同时C'的内部在乙的右边①；或C的内部在甲的右边，同时C'的内部在乙的左边，我们说A和A'有反方向，$\frac{A'}{A}$便是负数。

现在让C在S上收缩到P点，C所包的面积A便收缩到零去。同时C'在S'上也收缩到P'点，C'所包的面积A'也收缩到零。$\frac{A'}{A}$便变到一个数目，这个数目叫做曲面S在P点的高斯曲率；又叫总曲率。

下面是两个例子：

例一 假设S是一张平面，S上任一点的切平面便是S自己，S上任一点的法线便是S在该点的垂线。一张平面的垂线都是互相平行的，所以S上所有的点在S'上的代表点都是同一点。因此C'便只是一点，C'所包的面积便总是零，即是A'等于零，所以$\frac{A'}{A}$总等于零。

结论：一平面的每点的高斯曲率都是零。

例二 假设S是一个半径等于r的球，把S的球心O和S'的球

注解：①球面是凸的，其他的曲面有凸凹，故会发生这种情况。例如马鞍形曲面高斯曲率便是负的

心O'叠合起来。S上任取一点P。P 在 S'上的对应点为 P'。则OP和OP'实在是重合在一起(图68)。如果$r>1$，P'便在OP线段里；如果$r=1$，P便与P'重合；如果$r<1$，P便在OP'线段里。

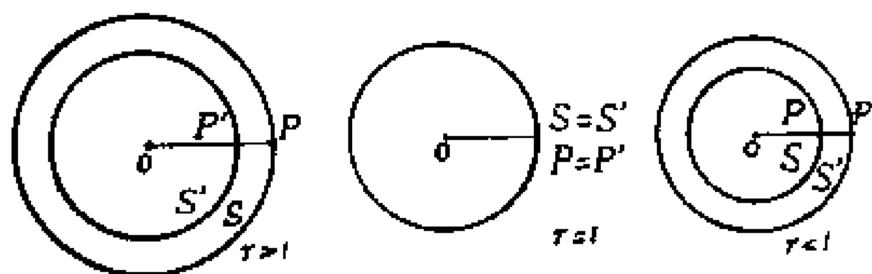


图68

用最简单的比喻，幻想球心O 是一个太阳，向四面八方发光，S上一点P在S'上的影子便是P'点。所以C'便是S上的C在S'上的影子，A'便是A的影子，所以A'和A之比等于S'和S的半径的平方之比，即是等于$1:r^2$。

结论：半径为r的球面上，每一点的高斯曲率都是 $\frac{1}{r^2}$。

一般地说，如果一曲面S在每一点的曲率都等于K，K是一已知的实数，则S称为定曲率曲面。例一中的S的K 等于零，例二中S的 K 是一个大于零的数目 $\frac{1}{r^2}$。自然，我们也一定会想看一看曲率小于零的定曲率曲面是什么样子。

假设一个人追一只狗。有一条长为 r 的绳子将人和狗联起来。开始的时候，人在狗的北面距离r的地方，狗向东边跑，人为了要追到狗，所以无论任何时候人都是面对着狗（狗的位置时时在移动，故人走的方向也时时在变)。狗为了不被人追上，在任何时候狗都设法与人保持 r 的距离，这样穷追下去，狗向东跑，所以狗是在一条直线上跑，人跑的路线叫定切曲线（图69）也不妨叫做追狗曲线。自然，由开始之点狗也可以向西跑，人也跟迹追逐，得到追狗曲线的另一半，以狗跑的直线为轴把追狗曲线转一周，便得到一个曲面，叫做伪球(图70)。伪球的

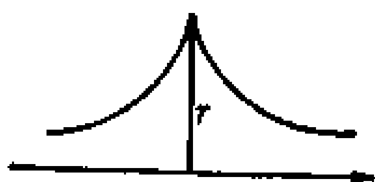


图69

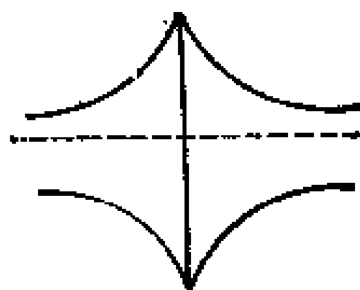


图70

特点是在每点的高斯曲率都等于$-\frac{1}{r^2}$。

3 非欧几何学

高斯证明了一个非常有趣的定理，假设一曲面S上每一点的高斯曲率都等于一个定数K（K可以大于零、等于零或小于零）；在S上任作一个测地三角形。终结，这个测地三角形的三内角之和大于、等于或小于两直角，由K大于、等于或小于零面定。用E记这个测地三角形的面积，用$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$记这个测地三角形的三内角①。则

$$E=\frac{1}{K}(\angle A+\angle B+C-\pi),$$

即是说K大于零时，E与角余成正比；K小于零时，E与角欠成正比。角余和角欠的定义在第三章第III节2款中已经写过，读者不妨回顾一次。

结论：在定曲率曲面S上的几何学由K而定。K大于零，所得的几何学是黎氏几何学；$K=0$所得的几何学是欧氏几何学；K小于零，所得的几何学是罗氏几何学。

三种不同的几何学可以由这个观点又统一成一种几何学的三种不同的情形。

这里我们顺便讲到球面上的几何学，这是属于黎氏几何学

的范畴。在本节1款中已说过，球上的测地线即为球上的大圆，在球面上任何两个大圆都有两个交点(图71)；所以任何两测地线有两个交点；或者说任两“直线”都有两交点。在黎曼的原来的假定中只说任两直线必相交，没有说有多少交点。这种有两个交点的黎氏几何学叫做双式椭圆几何学，或者简称为球面几何学，它所在的曲面叫双椭圆面或球面。如果把这两个交点看作一点，即是把一个球上每一条直径的两个端点都只当作一点看，任何两测地线便只有一个交点，或者说，任何两“直线”只有一个交点。这种黎氏几何学叫做单式椭圆几何学，或者就称为椭圆几何学，它所在的曲面叫做单椭圆面或射影平面。关于射影平面的性质，后面第九章第III节3款中再讲。

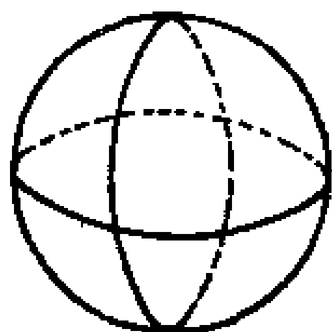


图71(1)

三次以上的微分几何学又叫黎曼几何学。它全部建筑在算式上面，不再是图形可以表示的。但是它却不只是一些数学家心中的幻想，我们研究宇宙的构造也要靠它。后面第十章中还会再提到的。

注解① 在较深的数学中，角度的单位用弧度角，普通的180°等于π弧度角。任作一个圆C，圆心在O点，半径等于r，在圆C上取弧$\widehat{PQ}$等于r。$\angle POQ$便是1弧度角，此地公式中的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$都是用弧度角作单位。

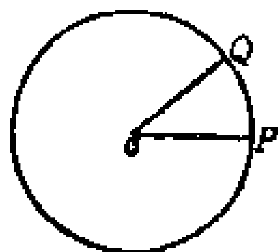


图71(2)

第七章　几何学的基础

I　几何学的公理化

几何学经过长期的发展，积累了极其丰富的材料，近代的几何学者重新将几何学的基础加以整理，并把它的丰富的内容安置在公理化的基础上。所谓“公理化”是这样的：

先提出一些基本概念，如点、线、面之类；这些基本概念是人类千百年来在大量的生产活动中所经常遇到的事物中抽象出来的，它们反映了客观世界的位置及图形的这一个侧面。其次规定这些概念之间要适合些什么关系，这些关系便称为公理，因为它们是人类在大量生产斗争实践中所反复证实其为正确并得到公认了的。一组公理要适合三个条件：第一，不相矛盾，即是由这组公理不会推得互相矛盾的结论。第二，各自独立，即其中的任一公理不能由此公理外的其他公理推得。第三，系统完全，即不再需要加入新的公理就足够建立所要的结论。有了这样一组公理，再依照逻辑所推得的结果叫命题，这些命题构成了在这组公理的基础上所建立起来的这种几何学的内容。

不同的条件下实践的结论不相同。因此，公理系统也可能不相同。在不同的公理系统的基础上所建立起来的几何学因而也有所不同，它们反映了在不同的条件下，客观世界的不同的某个侧面。

II 公理系统

由上节中所讲到的定义，几何学的基础是建立在一组公理上面的。欧几里德早已知道公理的重要性，他的公理系统满足了前两个条件，即是不相矛盾和各自独立，但是并不完全。譬如说他暗中引用了“一直线的长是无限的”，没有把这件事排在公理中，他已列为公理的各条的基础上推导出来。德国数学家希尔伯特重新把欧氏公理系统中不完备的地方补充完全，使得欧氏几何学的基础不再残缺。在他的著作“几何学的基础”一书中，把欧氏几何学应有的公理分为下面的三大类：

1 结合公理

基本概念1 几何学中的三种基本概念是点、直线和平面。通常以大写的英文字母A，B，C，…等记点；以小写的英文字母a，b，c，…记直线；以小写的希腊字母α，β，γ,…记平面。

公理1.1 过不同的两点A及B可以作一直线，也只可以作一直线。

公理1.2 过不在同一直线上的三点A、B及C可以作一平面，也只可以作一平面。

公理1.3 每一直线上至少有不同的两点存在；每一平面上至少有不在同一直线上的三点存在；在空间至少有不在同一平面上的四点存在。

公理1.4 如果一直线a上有不同的两点在一平面α上，则a上的每一点都在α上。

公理1.5 两平面α及β如有一点是公共的，则α和β至少还有另一点是公共的。

2 次序公理

基本概念2 在同一直线上的不同的三点 A、B及 C的位置有次序的关系，即三点中有一点在其他两点之间。

公理2.1 假设 A、B、C是同一直线上的不同的三点，如果B在A和C间，则B在C和A之间。

公理2.2 假设 A、C是同一直线 a上不同的二点，则在a上至少存在一点B在A和C之间；又在a上至少存在一点D，使得C在A和D之间。

这一个公理即是说线段AC中间有无数多点存在。又由A及C可以无限制地延长a。

定义2.1 假设 A、B为一直线 a上不同的两点，A、B两点及在A和B之间所有的点，合称为线段AB，用（AB）记它。a称为（AB）的底线。A，B称为（AB）的两端点。在A和B间的点，称为线段的内部，a上不属于（AB）的点叫线段的外部。

公理2.3 在一直线上任取不同的三点，必有一点在其他两点之间；且三点中只有一点能在其他两点之间。

公理2.4 又称巴徐公理(图72)。设A、B、C是不在同一直线上的三点(由公理1.2过A、B、C可以作一平面)。以（π）记过A、B、C的平面，在（π）上取一直线a。假设a与(AB）相交，但不通过A，B或C，则a必与(BC）和（AC）两线段之一相交，也只能与两线之一相交。

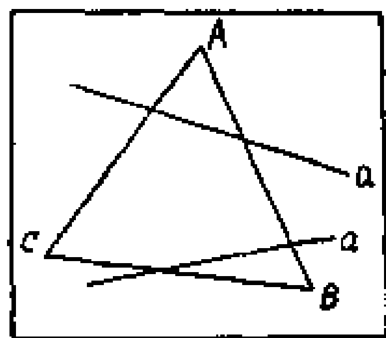


图72

这个公理平常我们用得很多，但是没有说明是公理。巴徐是第一个研究次序公理的几何学者。

利用上面的四个公理可以证明下面的定理。

定理2.1 在任一直线a上任取定一点O，则a上的其他各点可以分成二类，其性质如下：

1）假设A_1A_2是属于同一类的两点，则O在(A_1A_2)的外部。

2）假设A_1B_1是不属于同一类的两点，则O在(A_1B_1)的内部。

这个定理用普通的话来说，便是O把a分成两段。同一段上任取两点A_1、A_2，则(A_1A_2)不包括O。每一段中各取一点A_1、B_1则(A_1B_1)包括O（图73）。

定义2.2 假设A、O是不同的两点（由公理1.1可以作一直线过A及O），以a记过A及O的直线。由定理2.1，a上的点被O分为两类，与A同类的点的全体叫半线，OA用$\overrightarrow{OA}$记之。如果B在$\overrightarrow{OA}$上，则称A和B在O的同侧。如果B在a上但不在$\overrightarrow{OA}$上，则称B和A不在O的同侧。

由上面的公理和定理又可以得到下面的定理。

定理2.2 设a是一平面(π)上的一直线，则(π)上不在a上的点可分为两类。有下面的性质：

1）如果A_1和A_2是同一类的两点，则(A_1A_2)与a不相交。

2）如果A_1和B_1不是同类的两点，则(A_1B_1)与a相交于一点。

用普通话来说，a把(π)分割成两部分，同一部分的任意两点A_1和A_2之间的线段(A_1A_2)不与a相交。两部分各任取一点A_1和B_1，则a与(A_1B_1)交于一点（图74）。

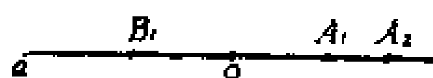


图73

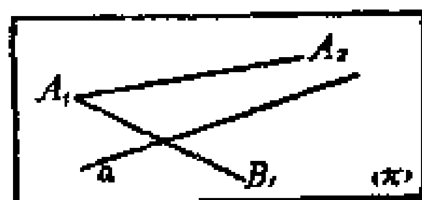


图74

定义2.3：假设有一直线a及一点P。以（π）记过a及P的平面。由定理2.3，（π）上不在a上的点分为两类，与P同类的点的全体叫做半面；a、P用（a，P）记之。如果A_1和A_2是同一类的两点，称A_1和A_2在a的同侧。如果A_1和B_1是不同一类的两点，称A_1和B_1在a的异侧。

由上面的公理、定理、定义又可以得到下面的定理。

定理2.3 在一平面（π）上任取一直线a，由a上一点O引出一半线h，如h不在a上，则h在a的一侧（图75）。

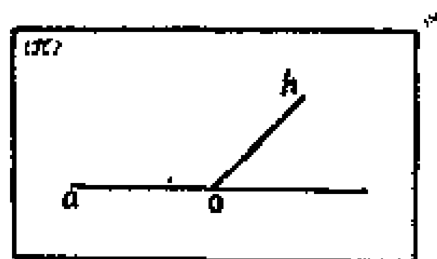


图75

3 叠合公理

基本概念3.1 两线段（AB）（$A'B'$）若是长短相等，便可以叠合一起成为一条线段。这种关系称为（AB）可以叠合于（$A'B'$），用（AB）$\equiv$（$A'B'$）记之。

公理3.1 设A、B是一直线a上的两点，A'是a上的一点。则在a上A'的一侧必有一点B'能使(AB)$\equiv$($A'B'$)，也只有这样的一点B'。A''是另一直线a'上的一点。则在a'上A''的一侧必有一点B''能使（AB)$\equiv$($A''B''$)，也只有这样一点B''。

有了这个公理，线段便可以无穷的引长了。

公理3.2 任何一线段都可以和它自己叠合。即(AB)$\equiv$(AB)或(AB)$\equiv$(BA)。

公理3.3 若(AB)$\equiv$($A'B'$)及(AB)$\equiv$($A''B''$)，则($A'B'$)$\equiv$($A''B''$)或($A''B''$)$\equiv$($A'B'$)。

公理3.4 假设(AB)、(BC)在同一直线a上。(AB)与(BC)只有一公共点B；($A'B'$)、($B'C'$)也同在a上或在同一直线

a' 上，$(A'B')$、$(B'C')$ 只有一公共点 B'。又假设 $(AB)\equiv(A'B')$ 及 $(BC)\equiv(B'C')$，则 $(AC)\equiv(A'C')$。

定义3.1 在一平面 (π) 上任取一点 O，由 O 作两条半线 h、k。根据定理2.4，知道 (π) 被 h、k 分为两部分，大的一部分叫外部，小的一部分叫内部。hk 及内部合称为角。O 点叫角顶。h 及 k 叫角的两边，这角的大小用 $\widehat{hk}$ 记之。

基本概念3.2 任何两个角 $\widehat{hk}$ 及 $\widehat{h'k'}$ 都可以比较大小，$\widehat{hk}$ 和 $\widehat{h'k'}$ 可以叠合时，用 $\widehat{hk}\equiv\widehat{h'k'}$ 记它。

公理3.5 假设 $\widehat{hk}$ 是一平面 (π) 上的一角，O' 为 (π) 上的一点，或另一平面 (π') 上的一点，经过 O' 在 (π) 上或 (π') 上引一直线 l。O' 分 l 为两半线，以 h' 记其中任一半线，则 (π) 或 (π) 上的 l 一侧，必定可以找到一条由 O' 起的半线 k'，使得 $\widehat{hk}\equiv\widehat{h'k'}$，也只有一条这样的 k'。

公理3.6 任一角都可以与它自己重合，即 $\widehat{hk}\equiv\widehat{hk}$ 或 $\widehat{hk}\equiv\widehat{kh}$。

公理3.7 如果 $\widehat{hk}\equiv\widehat{h'k'}$，$\widehat{hk}\equiv\widehat{h''k''}$，则 $\widehat{h'k'}\equiv\widehat{h''k''}$ 或 $\widehat{h''k''}\equiv\widehat{h'k'}$。

定义3.2 设 A、BC 是不在同一直线上的三点，连结三线段 (AB)、(BC)、(CA) 所成的图形叫三角形，用 $\triangle ABC$ 记之。A、B、C 叫顶点，(AB)、(BC)、(CA) 叫边。由 A 点过 B、C 各作一半线 h，k。$\widehat{hk}$ 叫做 (AB) 及 (AC) 两边的夹角，或 BC 边的对角，用 $\angle BAC$ 或 $\angle CAB$ 记之。

公理3.8 如果 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 有下面三种关系：

$(AB)\equiv(A'B')$，$(AC)\equiv(A'C')$，$\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$，

则一定又有下面的两种关系：

$$\angle ABC\equiv\angle A'B'C',\quad \angle ACB\equiv\angle A'C'B'$$

这公理并不是说 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 可以叠合。

4 平行公理——欧氏公理

公理4 在一平面（π）上，设有一直线a及不在a上的一点P，通过P可以作一直线p与a不相交，而且过P而不与a相交的直线只有p一条。

定义4 公理4中的p叫a的平行线。

5 连续公理——德得金公理

公理5 任一线段（AB）上的点可以分为二类。有下面的性质：

1）（AB）上所有的点必属于两类中的一类，也只属于两类中的一类，不能同时属于两类。

2）（AB）的两端点各属于不同的一类，每一类都必有若干点。

3）如果A'是与A同类的一点，但A'不是A点；B'是与B同类的一点，但B'不是B点。则A'在A和B'之间。

6 公 理 的 讨 论

上面的五类公理不自相矛盾，又各自独立，而且也已经足够建立欧氏几何学。在欧氏的原书中第一类和第四类公理都已明白地写出，第三类公理只写出一部分，公理3.1便没有写明，第二、五两类公理都被忽略了。第二类公理是证题时经常用到的，很容易懂。第五类公理是表示一直线上的点是“连续的”，或者说一条直线上是没有漏洞的。在解析几何学中，我们知道一直线上的点可以和实数对应起来。实数中分有理数和无理数，有理数即是零、正负整数和分数，有理数所对应的全体叫有理点。用S记有理点的全体，由肉眼看起来，有理点的全体组成一

"直线"似乎是没有漏洞的，但实际上是处处有漏洞，这种"直线"不妨称为有理点直线。假设一条有理点直线l上的两点，各在一个圆C的内部及外部，依肉眼看来（或者用放大任何倍的显微镜看来），l和C一定有两个交点；但是实际上l和C可能只有一个交点，或者根本没有交点。即是圆C可能由l上的数不清的漏洞里穿过去了。

III 非欧几何学

上面的五类公理中，只把第四类的欧氏平行公理，改为下面的罗氏平行公理：

公理4′ 在一平面（π）上，设有一直线a及不在a上的一点P。在a上任取一动点Q，由P作半线h经过Q（图76）。当Q沿a上的一个方向跑到无限远时，h的位置以h_1记之。h_1和h_2不在同一直线上。

定义4′ h_1及h_2称为过P点的a的平行线。左边的一条叫左平行线，右边的一条叫右平行线。

这样改变之后的五类公理也是一样的各自独立、不相矛盾和系统完全。由这五类公理，便可建立罗氏几何学。

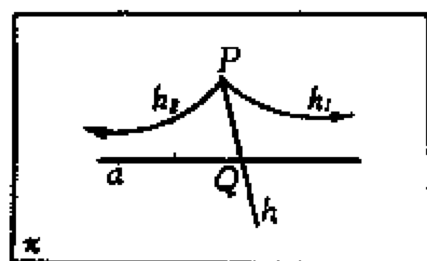


图76

如果把公理4改为下面的两条：

1）在同一平面上的任何两条直线必有公共点。

2）一条直线可以无限延长，但有定长，即是象球上的一个圆一样。

这样改变之后的这五类公理也是一样的各自独立、不相矛盾和系统完全。由这五类公理便可建立黎氏几何学。

IV 有限几何学

在本章结束的时候，顺便提一提维布伦所提出的有限几何学，它是由完全不同的公理系统上建立起来的。这种几何学中所讨论到的只是有限多点及有限多条直线。例如取七点 A，B，C，D，E，F，G及七条直线，每条各过三点，依次如下：

A	B	C	D	E	A	G
B	C	D	E	F	G	D
F	E	F	A	G	C	B

过每点有三条直线。过任不同的两点可以作一直线，也只可以作一直线。任两直线有一交点，也只有一交点，又可以定义有限的射影几何学。这种几何学对于群的理论很有关系，但是我们不能细说了；关于群的理论下一章再谈到。有了欧氏几何学便可以依次地建立起其他的几何学。

第八章　几何学的分类

I　群论观点下的几何学

上章中把几何学的基础打好，现在要谈到几何学的分类法。上章是由静的观点去看几何学，本章却是由动的观点去看几何学。德国的数学家克莱因把几何学看作研究在变换群下图形的不变的性质。在不同的变换群下，便得到不同的几何学。我们首先得知道什么是变换群，以及各种变换群下的几何学如何。

II　刚 体 变 换 群

各种变动中最简单的是刚体变换群。今分段说明之。

1 移　　动

任取一平面(π)，及一块三角形的木板，把这木板放在任一位置，如$\triangle ABC$。在(π)上任取一线段DE（图77）。现在把这木板在(π)上推动，但推动的方向要平行于(DE)而且由D推向E。推动的距离等于(DE)之长。这样推动之后，这木板便达到另一位置$\triangle A_1B_1C_1$。这种推动的方法称为平面上的移动。用T记这移动，用符号记这件事，便得下式：

$$T(\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1. \tag{1}$$

即是说，由$\triangle ABC$的位置经过一个移动T，移到$\triangle A_1B_1C_1$的位置去，由于(DE)的取法不同，便得到了不同的移动。在(π)

上再任取另一条线段(D_1E_1)，把这木板再由$\triangle A_1B_1C_1$的位置推动。推动时平行于(D_1E_1)，方向是由D_1至E_1，长度等于D_1E_1之长，这木板便由$\triangle A_1B_1C_1$的位置，推到$\triangle A_2B_2C_2$的位置。用T_1记这移动，用符号记这件事，便得下式：

$$T_1(\triangle A_1B_1C_1)=\triangle A_2B_2C_2. \qquad (2)$$

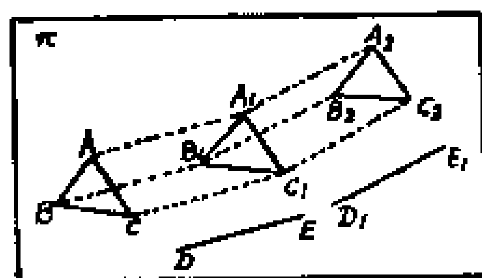


图77

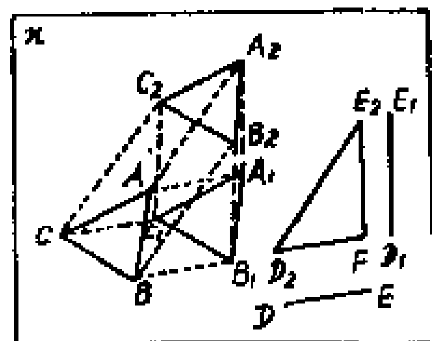


图78

即是说，$\triangle A_1B_1C_1$的位置经过一个移动T_1，移到$\triangle A_2B_2C_2$的位置。自然我们知道，由$\triangle ABC$的位置先经过移动T，再经过移动T_1，便移到$\triangle A_2B_2C_2$的位置。用记号表示这件事，便是下式：

$$(T_1+T)(\triangle ABC)=\triangle A_2B_2C_2. \qquad (3)$$

现在在(π)上作一个三角形$\triangle D_2FE_2$，使(D_2F)和(DE)平行而且相等，由D到E的方向与由D_2到F的方向相同(图78)。又使得(FE_2)和(D_1E_1)平行而且相等，由D_1到E_1的方向和由F到E_2的方向相同。

把木板由$\triangle ABC$的位置平行于(D_2E_2)移动，其方向与由D_2至E_2的方向相同，其距离与(D_2E_2)相同。经过这样移动，很巧地这木板由$\triangle ABC$的位置移到了$\triangle A_2B_2C_2$的位置。读者不妨自己试作一图看看，用T_2记这一个移动，用符号表示这件事，便得下式：

$$T_2(\triangle ABC)=A_2B_2C_2. \qquad (4)$$

把(3)和(4)比较一下，便得到一个结论：先经过T再经过T_1移动的结果，等于只经过T_2的结果，用符号表示便得下式

$$T_1+T=T_2. \tag{5}$$

定理 对于任何两移动T，T'，一定存在一个移动T''，使得：

$$T+T'=T''. \tag{6}$$

如果D和E重合，所得的移动叫做零移动，用0记它；所谓的零移动实际上即是不动。把这木板先经过一个移动T再不动。或者说先不动，再经过移动T，都是等于只经过一个移动T。用记号表示，便得下式：

$$0+T=T+0=T. \tag{7}$$

假设把木板由$\triangle A_1B_1C_1$的位置推动；推动的方法是平行于(ED)，推动的方向与由E到D的方向相同，推动的距离等于(ED)。则这块木板又由$\triangle A_1B_1C_1$推回原地$\triangle ABC$。用$-T$记这个移动，那么先经过T再经过$-T$，移动的结果等于不动，用符号表示得下式：

$$(-T)+T=0. \tag{8}$$

$(-T)$叫做T的反移动。(8)式简单地说，即是把一件东西搬去又搬回来，等于不搬。

这样(π)上所有的移动就组成了一个群，叫做移动群。

2 转 动

在一平面(π)上任取一点O，过O作两条半线h、k(图79)。把一块三角形的木板任意放在$\triangle ABC$的地位，把这木块绕O旋转，转的方向与由h转到k的方向相同，旋转的角度等于$\widehat{hk}$的大小，这木板便由$\triangle ABC$的位置转到$\triangle A_1B_1C_1$的位置，这种搬法叫转动。用R记这转动，用符号表示便得下式：

$$R(\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$$

即是说由$\triangle ABC$的位置经过一个转动R，转到$\triangle A_1B_1C_1$的位置去。

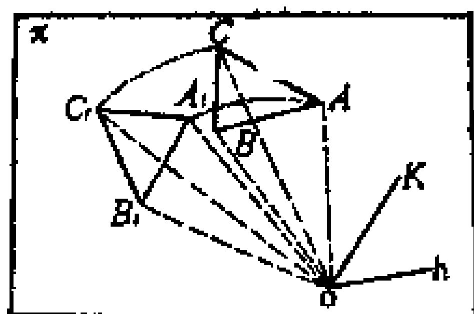


图79

和上节同样地，我们也可以得到一个定理：

定理 对于任何两个转动R_1及R，一定存在一个转动R_2，使得：

$$R_1+R=R_2. \qquad (1)$$

即是说，先经过R再经过R_1，所得的结果等于只经过R_2的结果。

如果h和k重合，即是$\widehat{hk}$等于零。这样的转动叫零转动，用0表示，其实就是不动。先经过转动R再不动与先不动再经过R所得的结果，都是等于只经过R的结果。用下式表示：

$$0+R=R+0=R. \qquad (2)$$

把木板由$\triangle A_1B_1C_1$绕O转动，方向与由k到h相同。转的角等于$\widehat{kh}$，则木板又转回到$\triangle ABC$来。这个转动叫R的反转动，用$-R$记它。得到下式：

$$(-R)+R=0. \qquad (3)$$

即是转去转回，等于不转。

这样(π)上所有的转动就组成了一个群，叫做转动群。

3 刚体变换

在平面(π)上取一个转动R和一个移动T。把一块三角形的木板放在$\triangle ABC$的位置，先经过R再经过T，这木板便由$\triangle ABC$搬到另一个位置$\triangle A_1B_1C_1$。这种搬法叫刚体变换，用M记它。用符号表示这件事得下式：

$$M(\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1. \qquad (1)$$

类似以上两节，我们可以得到下面的定理：

定理 对于两个M及M_1，一定存在一个M_2，使得：

$$M_1+M=M_2. \qquad (2)$$

如果用零移动和零转动合起来，便得到零刚体变换，用0记它。实际就是不动。我们也可以得到下式：

$$0+M=M+0=M. \qquad (3)$$

对于任一个M，也存在另一个刚体变换$(-M)$，使得：

$$(-M)+M=0.$$

$(-M)$叫M的反刚体变换。

这样(π)上所有的刚体变换便组成了一个群，叫刚体变换群。

4 图形的不变性质

假设在一平面π上，把一块三角形的木板经过一个刚体变换M，由$\triangle ABC$的位置搬到$\triangle A_1B_1C_1$的位置，A,B,C就各搬到了A_1，B_1，C_1。这样变动之后，有许多性质是不变的；其中最重要的是两点的距离和两半线的夹角，很显然地，$(AB),(BC)$，$(CA),\angle ABC,\angle BCA,\angle CAB$各等于$(A_1B_1),(B_1C_1),(C_1A_1)$，$\angle A_1B_1C_1,\angle B_1C_1A_1,\angle C_1A_1B_1$。于是，凡是建立在距离与角上的关系，经过搬动之后仍是不变的，这些关系叫几何学的定理。以上所述的不只限于把一个三角形的位置搬到另一个三角形，就是把任何一个图形F搬到另外一个图形F_1也是适用的。

结论：在一平面(π)上的刚体变换群之下，两点间的距离和两半线的交角都是不变的。建立在距离与交角上的性质都不变。

研究这些不变的性质的几何学包括欧氏、罗氏和黎氏三种

几何学在内，由此我们又可以由这种观点把三种几何学统一起来。

5 空间的刚体变换群

以上的讨论都只限于平面上，在空间的刚体变换群与平面上的很相似，只是活动的范围更宽广了。

在空中飞行的航空员，他可以有三种移动的方法：即是向上或下，向左或右，向前或后；另外还有三种转动的方法；即是倒向前或后，倒向左或右，及向左转或右转。于是在三度空间中便有六种不同的活动法。

李证明了下面的一个有趣而且重要的定理：

如果在一个三度空间中的图形，可以有上面六种不同的活动方向，而且可以随处活动，不受限制，这个三度空间必定是欧氏、罗氏或黎氏几何学里的空间。

这个定理告诉我们，初等几何学（或刚体变换群下的几何学）只有欧氏、罗氏、黎氏三种，不可能再扩充了。

III 仿射变换群

平面的刚体变换又可以从下面的观点来看。

假设把两张平面(π_1)和(π_2)重合起来，在(π_1)上画一个图形F_1，任取不在(π_1)及(π_2)上的一点p_1，由p_1放出光线把(π_1)上的F_1映到(π_2)上，得到一个图形F_2。又再取(π_3)和(π_2)重合，取不在(π_2)及(π_3)上的一点p_2，由p_2放出光线把(π_2)上的F_2映到(π_3)上，得到一个图形F_3…，如此下去，在(π_n)上得到一个图形F_n。把(π_1)和(π_n)分开，又随随便便地重合起来，F_1和F_n不一定再叠合了，由F_1搬到F_n便是平面上的刚体变换。这里最

重要的一点是F_1和F_n可以叠合①，叠合便是刚体变换的中心环节。

假设在上面的讨论中，(π_1) 和 (π_2) 只是平行而不一定重合，(π_2)和(π_3)只是平行而不一定重合…。由(π_1)上的 F_1 得到(π_n)上的 F_n。把(π_1)和(π_n)随随便便地重合起来，F_1和F_n不一定叠合，也不一定可以叠合。由F_1变到F_n叫做仿射变换。F_1和F_n的共同性质便是仿射变换F图形不变的性质。仿射变换也组成一个群，叫仿射变换群。刚体变换群只是仿射变换群的一部分。

研究在仿射变换群F 图形不变的性质的几何学，叫做仿射几何学。仿射几何学中的点、直线、平行线，在一直线的四点的交比和过一点的四直线的交比等等都是不变的。特别是平行线经过了仿射变换之后，仍是平行线，但两点间的距离和两半线间的交角都变了。

IV 射影变换群

假设上节中的 (π_1) 和 (π_2) 不一定平行，也不一定重合，(π_2)和(π_3)不一定平行，也不一定重合…。由(π_1)上的 F_1 得到(π_n)上的F_n 。将(π_1)和(π_n)随随便便地重合起来，F_1和F_n不一定叠合，也不一定可以叠合。由F_1变到F_n叫做射影变换。F_1和F_n的共同性质便是射影变换下图形不变的性质。射影变换也组成一个群，叫射影变换群。刚体变换群和仿射变换群都是射影变换群的一部分。

研究在射影变换群下图形的不变的性质，叫做射影几何学。

注解：①F_1和F_n可以叠合，但不一定叠合，正如我可以来，但不一定来一样地有区别。

射影几何学中的点、直线，在一直线上的四点的交比和过一点的四直线的交比等等都是不变的。

在上节和本节所讲到的，都只是平面上的几何学；至于三度和三度以上的空间里的几何学，在纸上不能画出，得靠代数的方法去定义和证明，故省略了。

上述各种几何学，由于所用的工具的不同而有分别。例如，不用微积分的算是初等几何学；用微积分算的，再加上微分或积分等名字；所以有初等几何学、微分几何学、初等射影几何学、射影微分几何学等等不同的名称。

V 变 换 群

上面说了很多种变换群，现在总结起来下一个定义：假设有许多变换T,T_1,T_2，…。用S记它们的全体。规定T_1+T表示先经过T再经过T_1所得的结果，其余类推。

假设S适合下面三个条件：

第一，任取S中的两个变换T_1及T_2(T_1及T_2可以相同，可以不同)，在S中一定找到一个变换T_3，使得：

$$T_1+T_2=T_3.$$

即是说，先经过T_2再经过T_1的结果，等于只经过T_3的结果。

第二，S中有一个零变换0，使得S中任一个变换T都适合：

$$T+0=0+T=T.$$

即是先经过O，后经过T，与先经过T,后经过O所得的结果，等于只经过T的结果。一般地说，O即是不动。

第三，对于S中任何一个变换T，在S中必定找得到一个T'，使得：

$$T'+T=0.$$

即是先经过T，后经过T'，等于不动，即是搬去又搬回原地。T'叫T的反变换，一般用$(-T)$记T的反变换，即是：

$$(-T)+T=0.$$

适合上面三个条件的S，便叫一个变换群。除掉刚体变换群、仿射变换群、射影变换群之外，尚有很多种变换群。在各种变换群下，便得到各种不同的几何学。例如用复变数函数定义的保角变换。在这种变换群下，角是不变的，距离是变了，这种几何学叫保角几何学，在本书中不能讲到。这种保角变换，对于飞机设计师是一种常用的数学工具。在设计机翼剖面的曲线时，便用到它。读者或许想知道别的变换群下的几何学，下章中我要介绍另外一种性质与上述各种几何学相差很大的几何学。

第九章　拓扑学（连续几何学）

I　拓扑学简述

拓扑学是音译的，意译则应该是"一对一的连续变换群下的几何学"，这样译出，一方面太长，另一方面也不一定会使读者了解。

19世纪末期，法国数学家庞卡莱在研究天体力学及其他的物理技术和数学分析的问题中，发现一类不能用从前的数学方法来处理的新问题。这些问题大体上属于事物的定性的研究，它为复杂的计算提供了若干概括的性质上的论断。20世纪以来，得到很大的发展。拓扑方法在若干工程技术例如无线电技术中得到许多应用。

II　一维拓扑学

假设在纸上画一条东西方向的直线l（图80），在l上任取数点P_1，P_2，P_3…用E记这些点的全体。E叫一个点集，P_i叫属于E的点。

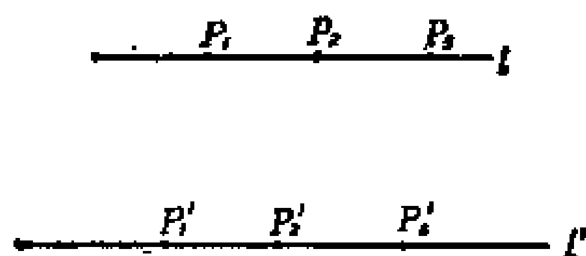


图80

假想这条直线是一条橡皮带子，把这带子向东西两方用力一拉，但是不要拉断；这样拉动之后，l拉成另外一条直线l'。P_1，P_2…等点的新位置各为l'上的P'_1，P'_2…等点，用E'记这些新点P'_1，P'_2，…的全体。经过拉动之后，P_1与P_2的距离不一定和P'_1与P'_2的距离相等，即是说距离变了。有什么不变呢？下面一一分述：

1）假设E中有n点（n是一个正整数），那么E'中也只得n点。这是再简单也没有的了，即是点数是不变的。

2）假设E中只有三点P_1，P_2，P_3，而且P_2在P_1和P_3之间，那么E'也只有三点P'_1，P'_2，P'_3，而且P'_2也在P'_1和P'_3之间，更一般地说，次序是不变的。

上面两例很简单，现在举一个较繁的例子：

3）假设取一根一尺长的橡皮带子，以P_0和P_1记它的两端（图81），以P_2记P_0P_1的中点，以P_3记P_0P_2的中点。这样继续下去，以P_n记P_0P_{n-1}的中点，以E记这无穷多的点P_0，P_1，P_2，…的全体，我们可以看到，离P_1四分之一尺以内，除P_1本身外，没有属于E的点；或者忽略一些说，我们找到了一个大于零的距离（四分之一尺自然大于零），使得离P_1不超出此距离的地方里，除P_1本身外，没有属于E的点。适合这条件的点叫点集E里的孤立点。同样我们也可以说P_2是E的孤立点，因为我们可以找得到一个大于零的距离（譬如说八分之一尺），使得离P_2不超出此距离的地方里，除P_2本身外，没有属于E的点，所以实际上P_1，P_2，…等点都是E里的孤立点，只有P_0是例外。离P_0的任何大于零的距离的地方里，除P_0本身外都有属于E的点，因此P_0不是E里的孤立点，用几何学的话来说，P_0是点集E的极限点。

现在把橡皮带P_0P_1向东西两方拉开，但不要拉断。P_0，

P_1，P_2，…等点的新位置为P_0'，P_1'，P_2'…等点，用E'记这些新点P_0'，P_1'…等的全体，不管P_0'，P_1'是三尺五尺，P_1'，P_2'…等点仍然是E'的孤立点，而P_0'仍然是E'的极限点，因此我们得到一个重要的结论：

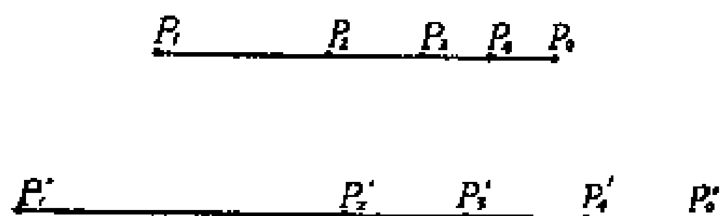


图81

一点集的极限点在被推动后，仍然是不变的。

极限点这观念是拓扑学及分析学的微积分等的最中心的概念。

III 二维拓扑学

在一张平面(π)上取数点P_1，P_2，…以E记这些点的全体。假设这平面是橡皮做的，把它沿水平的方向拉开，但是不要拉破，P_1，P_2…等点便跑到P_1'，P_2'…等点去，用E'记这些新点P_1'，P_2'…的全体。我们要问E和E'有什么地方相同，或者说经过拉动后有些什么不变。

1 约当曲线

假设E是(π)上的一个圆周上的点的全体(图82)，E把(π)上的点分成三种：一种在E内，一种在E上，一种在E外；经过推动后，(π)拉成(π')，E拉成(π')上的一条曲线E'(图83)。E'也把π'上的点分为三种：一种在E'内，一种在E'上，一种在E'外。而且在E内、上、外的点，经拉动后，仍然依次是在E'内、

上、外的点。E内的点连成一片，E'内的点也连成一片。“内”、“外”、“连成一片”这些关系都是不变的。E'一类的曲线叫做平面上的约当曲线，是用法国数学家约当来命名的，因为他在这方面作了深入的研究。

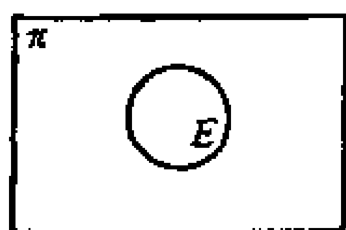


图82

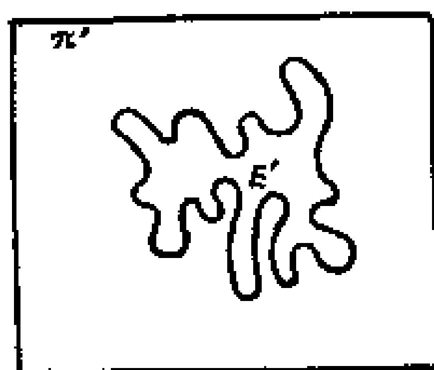


图83

上面的这些例子，似乎把拓扑学和直观（特别是直觉）连在一起，没有什么奇怪的地方。现在我要举一个例子请读者去考验你们自己的直观能力了。

假设要把一个国家分为三省，省界的划分要适合下面的两个条件：

第一，每一省本身是连成一片的。

第二，在省界线上的点，每点都是三省的交界点。

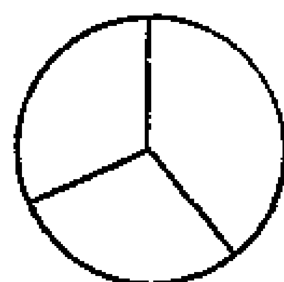


图84

第二个条件在直觉下似乎是不可能的。一般人的心目中都想着三省只交于一点(图84)，每两省有一条共同的边界，这边界上的每一点，不可能同时是三省的交界点。这里必须告诉读者，此满足条件一和二的分法是可能的。可以经过巧妙的方法来把这个国家分为这样的三省。

2 四色定理

假设把一个国家分为许多省，省数不拘，只要不是无穷多

便行了。每一省的土地必须连成一片，又假定三省或三以上的省交界的点不是无穷多，平常我们所画的地图都行。省分好之后再加上颜色，加色有限制，就是任何相邻的省不能着同一色，以免看不清省界。早已有人证明过，用五种颜色便足够画这地图，不管省界如何划分都可以。若给小孩子们五种不同颜色的铅笔和一张任何国家的地图，让他们去加上颜色，并规定他们在作画时，任何邻省都不用同一色，这是一个很有趣的游戏。

但是这样的地图只用三种颜色是否可以画呢?不一定可以。如下图中(图85)的四个省，每两省都是邻省，所以必须用四色才能画。

我们便得到下面的一个结论：

任何地图只用五种不同的颜色一定可以画成，只用三种不同的颜色不一定可以画成。

现在问题出来了，任何一张地图只用四种不同的颜色是否一定画得出来？或是有些地图只用四种不同的颜色画不出来？

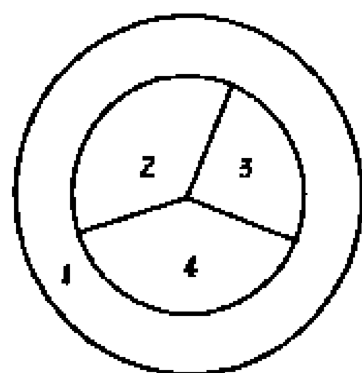
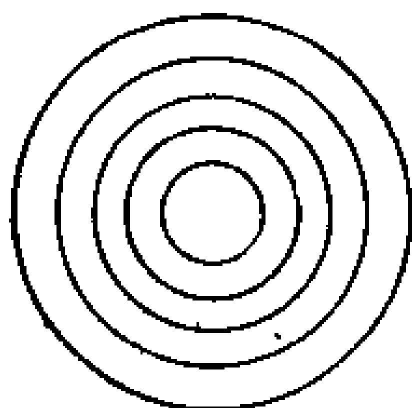


图85

这个问题，最初制图工人在实践中发现用四个颜色便可以了，因此叫做四色问题。经过一百多年现在已由人的推理与快速计算机相结合而得到证明，故现在又称四色定理。机器用于数学证明的这一胜利在数学发展中必将产生极其深远的影响。

与四色问题有关的是二色问题和三色问题。

先谈二色问题，假设只用两个不同的颜色，可以画些什么图呢？最简单的是一些同心圆形的分省法(图86)；其次是一种偶图形，即是每一个交界点都是偶数的省份的交界点。例如(图87)有九省，有三个交界点 A、B及C；在A点有六省相会，


图86

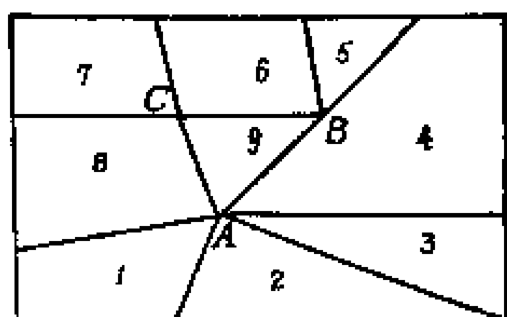


图87

在 B 点及 C 点各有四省相会；总之在每个交界点都是偶数的省份相会，将图中的1，3，5，7，9各省着黑色，2，4，6，8各省着白色，只用二色就画成了。

用三种不同的颜色又可以画些什么图呢？自然，凡是两种不同的颜色可以画的图，用三种不同的颜色都可以画出。另外还有一个叫偶边图形，即是每一省和偶数的不同的省份相邻接。例如(图88)有八省，第一省和第八省各与其他六省接界。第二、三、四、五、六、七省各与四省接界，这就是一个偶边图形。现在把第一和第八省着红色，第二、四、六省着白色，第三、五、七省着黑色，用红、白、黑三色便可以画成这图了。

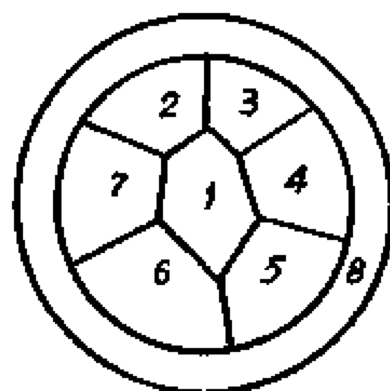


图88

在别的二维曲面上，则有不同数目的着色问题，例如环面上为七色，因此，我们要转到其他类型的二维曲面上去。

IV 二维曲面的拓扑学

取一个橡皮球面 S（图89）。把它用力一拉，但不要拉破，

可以拉成一个鸡蛋形，但是无论如何拉不成一个救生圈（或称环面）。反之救生圈不要拉破也拉不成一个球面。在球面上穿一个小洞，这橡皮球面便可以拉成一张平面；在救生圈上穿一个小洞，这橡皮做的救生圈面还是拉不成一张平面，即是说经过拉动后球面和救生圈面还是不同的。但球面和鸡蛋面可以互相变化。问题是在画球面和鸡蛋面的相同之点，及救生圈面的不同之点等关系。

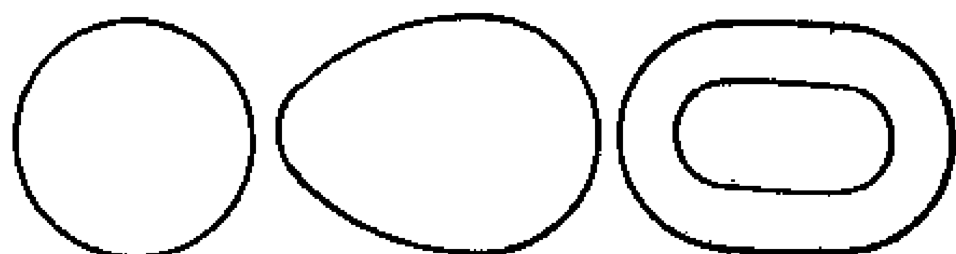


图89

1　三角形分割

试把一个曲面分割成一些三角形，这叫做三角形分割。例如在一个球面上取不同的四点A，B，C，D（图90），连六曲线AB，AC，BC，AD，BD，CD，把球面分成四个三角形ABC，ABD，ACD，BCD。反之，如果我们知道四个三角形ABC，ABD，ACD，BCD，把它先合成一个金字塔样的三角锥形（图91），设想这个锥面是橡皮做的，把气打足，便得到图90的球形。

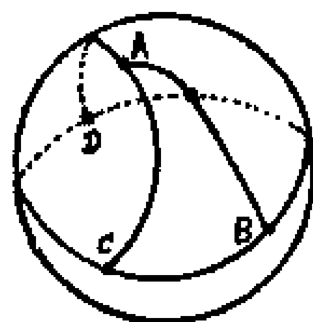


图90

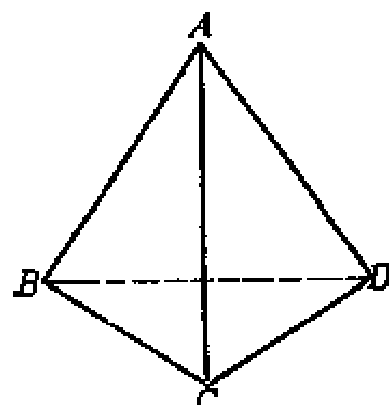


图91

假设有十八个橡皮做的三角形(图92)：

ABD，*BDF*，*FBC*，*CFH*，*CHA*，
AHD，*DFE*，*EFG*，*GFH*，*HGI*，
IHD，*DIE*，*AEG*，*AGB*，*BGI*，
BIC，*CIE*，*CEA*

这十八个三角形合起来便得到一个数生圈。我先代读者排成图92的样子，其次你得把两边*ABCA*及*ABCA*合起来得到一个圆筒，再把圆筒的两端*AEDA*及*AEDA*合起来，便得一个数生圈。反之，我们也可以把一个数生圈割成十八个三角形。

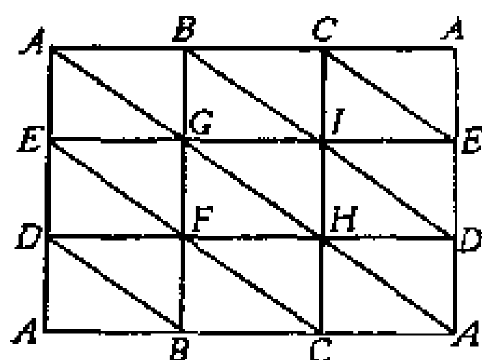


图92

一般的说，任何一个曲面都可以割成有限个三角形*ABC*，*BCD*，…，使得任何一个三角形的三顶点是不同的三点，任何两个三角形没有相同的三顶点。

2 欧拉——庞卡莱数

把一个球面任意地分割成三角形图样。假设有n_0个不同的顶点，n_1条不同的边，n_2个不同的三角形。用X记$(n_0+n_2-n_1)$，我们得到一个重要的定理：

定理 不管如何分割一球面，X总等于2。

例如，把一个球面分成四个不同的三角形*ABC*，*ABD*，*ACD*，*BCD*(图90)，有六条不同的边*AB*，*BC*，*CD*，*AC*，*AD*，*BD*，有四个不同的顶点*A*，*B*，*C*，*D*，所以$n_0=4$，$n_1=6$，$n_2=4$。故X等于2。

又例如，把球面分成六个不同的三角形*ABC*，*ABD*，*ACD*，*ECD*，*EBD*，*EBC*(图93)，有九条不同的边*AB*，*AC*，*AD*，*BC*，

BD, CD, EB, EC, ED。有五个不同的顶点A, B, C, D, E，所以$n_0=5$，$n_1=9$，$n_2=6$。X仍然等于2。随你怎么分法，X总是2。

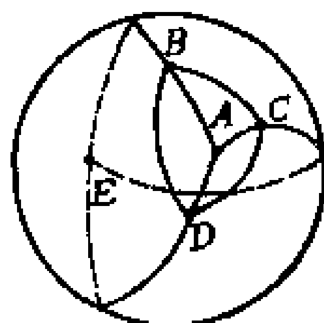


图93

这里值得特别注意的是，当你把橡皮拉长或压缩时，只要不弄破，那么n_0，n_1，n_2都是不变的数，所以X也是不变的数。

现在看一看救生圈面，若把它任意地分割成三角形的样子，也用n_0，n_1，n_2分别记不同的顶点、边、面的数目。仍然用X记$(n_0+n_2-n_1)$，我们也得到一个定理：

定理 不管如何分割一个救生圈面，X总等于零。

例如图92中有十八个不同的三角形，九个不同的点，以及二十七条不同的边，所以$n_0=9$，$n_1=27$，$n_2=18$，X便等于零。别的例子让读者自己去想去。

我们可以看出球面的X等于2，救生圈的X等于零。而且当曲面被拉长或压缩时，只要不被拉破，X仍然是不变的，X叫做欧拉——庞卡莱数，欧拉及庞卡莱是最先研究这种性质的两个数学家。

欧拉——庞卡莱数不只限于三角形分割，任何的分割法都可以，只要适合下面的两个条件：

第一，沿任何一个面的边界线割下这个面来，都可以拉平成一个圆片。

第二，任何一条边要有端点，端点重合不重合都没有关系。

仍然用n_0，n_1，n_2，分别地记点(即边的端点)。边及面的数目，用X记$(n_0+n_2-n_1)$。这样得到的X和用三角形分割得到的X是相同的。下面举几个例：

例一 把球面用两平行的平面切成三部分α，β，γ(图94)。

α及γ都可以拉成一张圆片，β却只能拉成一个圆圈形(图95)，所以β不适合上面的条件一，同时β的边也没有端点，又不适合条件二。现在在γ的边上取一点D，在α的边上取一点E，取DE线把β割开；这样，上面的两个条件都适合了，而得到两个点D，E；二条边DE和γ及α的边DD及EE；三个面α，β，γ；所以$n_0=2$，$n_1=3$，$n_2=3$，故X等于2。

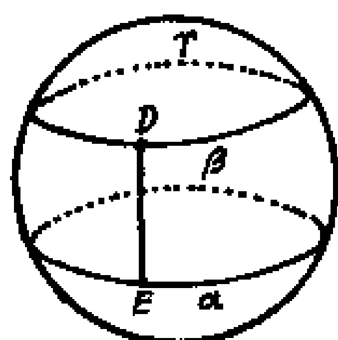


图94

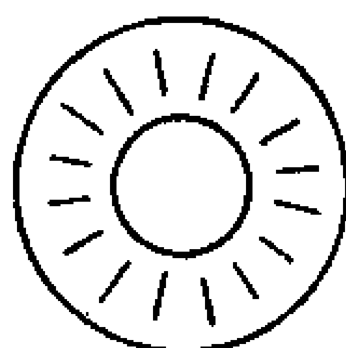


图95

例二 在一个球面上取两点A，B(图96)。连AB，沿AB将这球面割开，便可拉成一个圆形(图97)，所以这种分割也适合了上面的两个条件。现在数一数看，这里只有一个面，有两个端点A，B及一条边AB，所以$n_0=2$，$n_1=1$，$n_2=1$。于是X仍然等于2。

如果我们用a代表AB边，用a^{-1}代表BA，圆的边界便可以用aa^{-1}表示。反之，有了aa^{-1}，我们可以先作一个圆片，圆周上取两点A及B，以a记AB，那么这圆形便成了aa^{-1}，把AB和AB凑合起来，又得了图96中的球形。

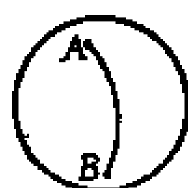


图96

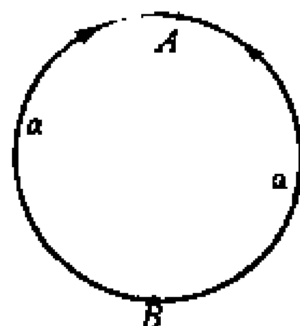


图97

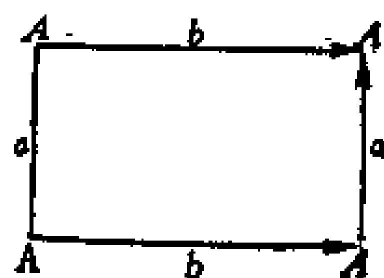


图98

例三　取一个长方形的纸片(图98)，四角用A记之，两对对边各用a及b记之，图中的箭头表示边的方向，这长方形的周围可以用$aba^{-1}b^{-1}$记之；即是说沿这长方形的周围走一周时，先顺着a边走，再顺着b边走，再逆着a边走，再逆着b边走，便走完一周。现在把b边和b边合起来，正方向与正方向合起来，便得到一个圆筒(参看图92)，再把这圆筒的两端(即a)合起来，a的正方向与a的正方向合起来，这样便得到一个救生圈(图99)。在图中有一个点A，两条边a，b及一个面，所以$n_0=1$，$n_1=2$，$n_2=1$，于是$X=0$。

结论：有了$aba^{-1}b^{-1}$便可以画成图98的样子，再合成图99的样子。有了一个救生圈，在它上任取一点A，再划两条分线如图99，便得到图98的样子，于是得到$aba^{-1}b^{-1}$。所以$aba^{-1}b^{-1}$可以代表一个救生圈。

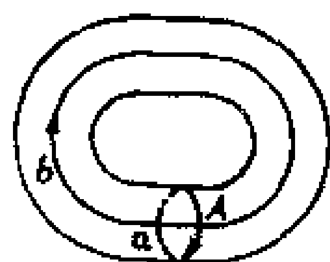


图99

例四　取一个八角形纸片(图100)，八个角点都是A。八边依次为a_1，b_1，a_1^{-1}，b_1^{-1}，a_2，b_2，a_2^{-1}，b_2^{-1}。即是沿这纸片走一周时，先是顺a_1走，再顺b_1走，再逆a_1走，再逆b_1走，再顺a_2走，再顺b_2走，再逆a_2走，再逆b_2走，便走完一圈。

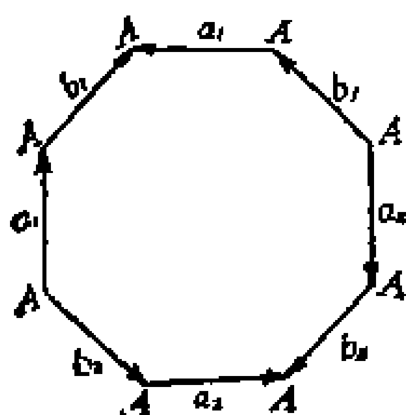


图100

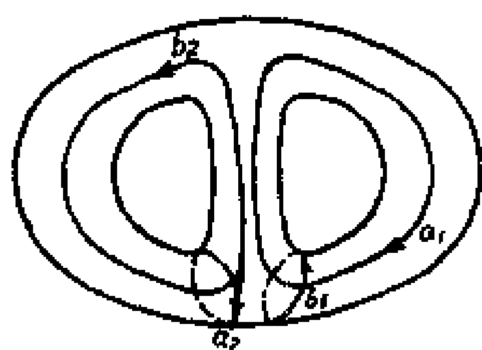


图101

图100中的箭头表示各边的方向。现在把所有的八个A点合在一起，a_1和a_1合起，正方向和正方向合起来，如例三一样，b_1和b_2合起，…，全部合完便得到一个曲面(图101)。这曲面比救生圈多一个洞。图100中有一点A，四条边a_1，b_1，a_2，b_2及一个面。所以$n_0=1$，$n_1=4$，$n_2=1$，于是X等于-2。

把曲面随便如何分法，所得的X总是-2。

3 单面曲面

假设一个蚂蚁在一个球的表面上爬，它永远爬不到球的里面；即是说这球有两面，叫双面曲面。

现在取一个长方形的纸条AMB，AMB(图102)，把AMB和AMB合起来成图103的样子，这个曲面叫摩比带子。假设一个蚂蚁由M点顺着一条路线MM上爬行，当它爬回M点时，它已经在出发点的背面；即是说本来它认为是向上的方向，现在它发觉是向下的方向了，换句话说，这种曲面的"表""里"无从分别，只有一面，故名为单面曲面。这种单面曲面有很多有趣的性质。假设你用剪刀沿MM剪一周，你以为把它剪为两条带子了，其实仍然是一条。

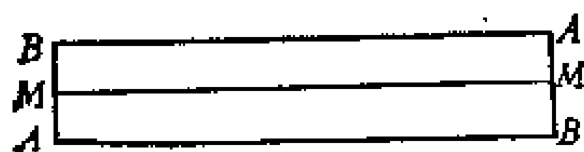


图102

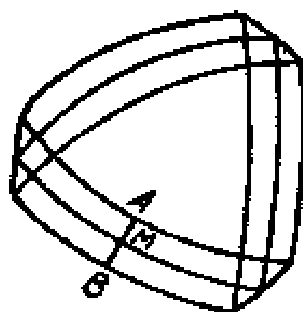


图103



图104

摩比带子的边被A，B分成两段，现在把B当作A点，这两段A B合起来，便得到一个曲面，叫做克莱因瓶（图104）；它也是单面曲面，没有表里，在三次空间如要作出，必须穿过它本身，图102中有两个点 A（即是B），M，四条边AM，MB，AB，MM，两个面，所以$n_0=2$，$n_1=4$，$n_2=2$，于是克莱因瓶的X便等于0。

克莱因瓶又可以用另一个方法作出，取一张长方形的纸片，其四边为a_1，a_1，a_2，a_2，四顶点为A（图105）。把四顶点A重合，把a_1和a_1重合，其正方向重合，把a_2和a_2重合，其正方向重合，便得到图104的曲面。

另外我们还谈到一种有名的单面曲面，取一个球面，球面上任何一直径的两端点都只当作一点；或者说使任何一直径的两端点都重合起来。这样得到的一个曲面叫射影平面；单式的黎氏几何学便是在这种曲面上的几何学，例如把一个球面用互相垂直的三张平面切开，得到八个三角形，十二条线、六个点（图106）。

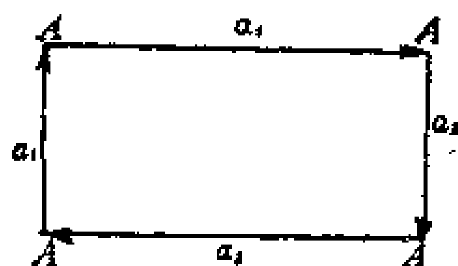


图105

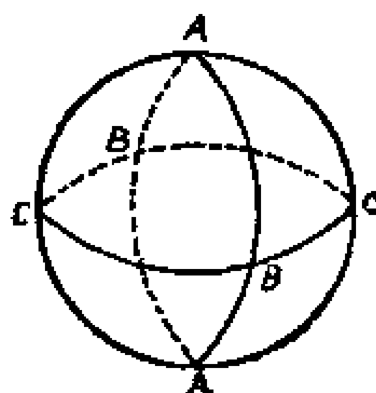


图106

假设把每一直线的两端点看作一点，便得到四个三角形，六条线、三个点（如图106中的A，B，C）；所以射影平面的X等于1。射影平面的另一个作法是取一张圆纸片（图107），同一直径的两端点便算作一点，或者在圆周上任取一直径，其两端点

均以A记之。这圆周便被切成两段，用a记其中的任一段，这圆周便可以用a a表示起来，然后把A与A重合，a与a重合，正方向重合，便得到射影平面。

射影平面是由平面的射影几何学而得名，因平面的射影几何学中一平面的任一直线上的两个无限点（即两个方向相反的无限点），是当作一个有限点的。这平面即是上面谈到的曲面。

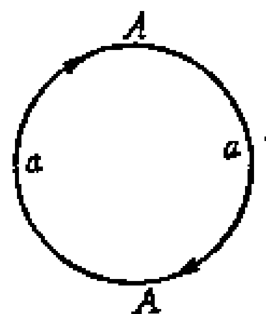


图107

4 二维闭曲面

取有限多个三角形ABC，ABD，…以S记其全体。假设S适合下面四个条件：

1）每一个三角形的三顶点是三个不同的点，即是不会有AAB之类出现。

2）S中每两个三角形至少有一顶点不相同。即是S中不会有两个ABC出现。

3）每一边在S中出现两次，也只出现两次。例如AB在$\triangle ABC$及ABD中共出现了两次，在S中便不会再有$\triangle ABE$之类出现。AC在ABC中出现一次，在S中一定还有一个$\triangle ACE$之类含AC的三角形出现，也只会再出现一个。

4）S要能够连成一片。例如下面的八个三角形：ABC，ABD，ACD，BCD，EFG，EFH，FGH，EGH，虽然适合上面的三个条件，但是不能连成一片，而是前面的四个三角形连成一片，后面的四个三角形连成一片，但两片之间没有相连之处，这八个三角形便不能连在一起。

把S中的三角形的边AB，AC，…和AB，AC…依次凑合起来，便得到一个曲面叫做二维闭曲面。前面提到过的救生圈、

球、射影平面等等都是二维闭曲面。

二维闭曲面可以分为三大类：

第一类是球面，以及由球面任意拉成的鸡蛋面，或者压扁而成的橘子面。这一类的表示方法是aa^{-1}(参看本节2款中的例二)，欧拉——庞卡莱数是2。

第二大类包括第一大类以外的所有的双面的二维闭曲面，其作法如次：

把一个球面开两个圆洞(图108)，用一条圆管把这两个洞连起来。这个面其实是救生圈面，它的表示方向是 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ (参看本节2款中的例三)，欧拉——庞卡莱数是0。

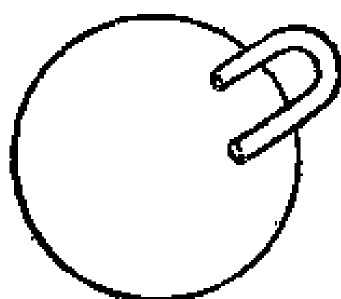


图108

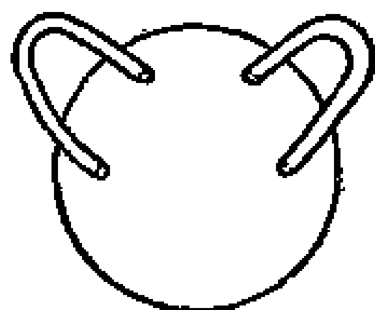


图109

把一个球面开四个圆洞，(图109)，每两个圆洞用一条圆管连接起来。这和本节2款中的例四一样，它的表示方法是$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$，欧拉——庞卡莱数是－2。

一般地说，把一个球面开$2h$个圆洞(图110)，每两个圆洞用一条圆管连接起来，这一类的表示方法是 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}$，欧拉一庞卡莱数是$2(1-h)$。

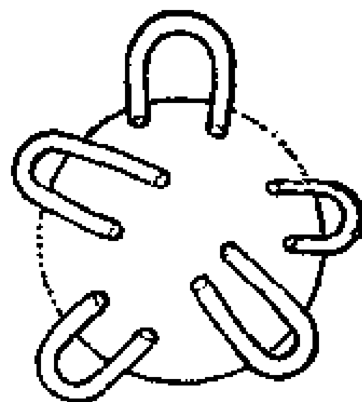


图110

第三大类包括所有的单面的二维闭曲面，又可细分为下面各种：

射影平面(参看上款)的表示方法是a_1a_1，欧拉——庞卡莱数是1。

克莱因瓶（参看上款）的表示方法是$a_1a_1a_2a_2$，它的欧拉——庞卡莱数是0。

一般地说，取一个圆片，把圆周分为$2k$等分，各分点都记作A，各线段依次用a_1，a_1，a_2，a_2，…，a_k，a_k记之。把各对a_i重合起来，正方向相重合，所有的A点重合起来，便得到一个封闭曲面，用a_1a_1，a_2，$a_2 \cdots a_ka_k$记它。这图形只有一点A，k条边，一个面，所以它的欧拉——庞卡莱数等于$2-k$。这个图形如要画出，必须穿过它自身，不容易看法，所以省略了

总结：列表如次：

类　别	记　　号	曲面的欧拉——庞卡莱数	单面或双面
1	x	2	双　面
2	h	$2(1-h)$	双　面
3	k	$2-k$	单　面

定理　一个二维闭曲面的欧拉——庞卡莱数不因拉长或压缩这曲面而有变化。它的单面或双面的性质亦不因拉长或压缩这曲面面有变化。两个二维闭面S_1及S_2如有相同的欧拉——庞卡莱数，又同为单面曲面或双面曲面，则S_1可以拉成或压缩成S_2。

V　拓扑学与微分几何学的联系

在第六章中我们看到，微分几何学是利用微分工具来研究曲线、曲面等在点附近的弯曲情况的。本章上一节，我们则看

到拓扑学研究了曲面的全局联系情况，虽然一个是研究局部性质，一个是研究全局性质，但是全局是由局部所积成，因此，它们应当存在某种本质的联系，果然如此！下面我们来举一个最著名的定理。

设取一个双面二维闭曲面S，则 S 的欧拉——庞卡莱数为$X=2(1-h)$，$h=0, 1, 2\cdots$，S上每一点有一个高斯曲率k，则X与k之间有关系：

$$2\pi X=\iint_S k dS.$$

这个关系是很有趣的，因为方程的右方是由无数的小块上的高斯曲率k积分起来所合成的，而方程右方的X则是全局性质的一个示性量。但是，我们也可以作一定的理解，原来 k 的定义是在曲面上一点附近取一小面积ΔA并作它在单位球上的代表面积$\Delta A'$，$k=\Delta A'/\Delta A$。现在，将k对曲面积分，也就是作无限项之和

$$\sum\left(\frac{\Delta A'}{\Delta A}\right)\Delta A=\sum(\Delta A')$$

这就得到单位球的若干倍的面积，亦即得

$$\iint_S k dS=4\pi N,$$

N为整数或零，它表示曲面S在单位球面上的对应点将单位球包裹了多少次。$2N=x$。当S为球，则包括一次；S为环面，则包裹情形正负抵销，得到零次；S为有h个管联在球上，则包裹情形为$(1-h)$次。由此即得上面的精美的公式。上面这个定理可以推广到高维空间，但是已经没有上面所说的这种直观性。

VI 三维拓扑学

研究二维闭曲面的方法，可以推广去研究三维的闭曲体；

三角形分割用三角锥代替，一个三维的闭曲体可以分成有限多个三角锥，正如二维的闭曲面可以分成有限多个三角形一样。假设分成n_3个三角锥，n_2个三角形分界面，n_1条边和n_0个顶点，我们仍然以X表示$n_0+n_2-n_1-n_3$，X 叫做这三维闭曲体的欧拉——庞卡莱数。这里有一个很简单的定理。

定理 任何一个三维闭曲体经过任何三角锥分割后，其欧拉——庞卡莱数都是零。

例如取五个三角锥体*ABCD*，*BCDE*，*CDEA*，*DEAB*，*EABC*（图111），把这五个三角锥体相同的顶点放在一起，相同的边合在一起，相同的面合在一起，便得到一个最简单的三维闭曲体，叫做庞卡莱空间。因其研究者而得名。自然在三度空间中你把它们合不起来，必须在四度空间中才合得起来，正如四个三角形*ABC*，*BCD*，*CDA*，*DAB*在平面上合不起来，必须在三度空间中才合得起来一样（参看上节中图91）。上面的分割中有五个锥体、十个三角形、十条边、五个顶点，所以

$$5+10-10-5=0$$

即是欧拉——庞卡莱数是零。

读者不要小看这个庞卡莱空间，它的体积虽然只是五个三角锥这样大，但是它是无边界的，向任何一方向都可不断前进；正如一个蚂蚁爬在三角锥面*ABCD*上一样。这三角锥面的面积只是四个三角形，可是这蚂蚁却只好永远在上面爬，无法爬出。

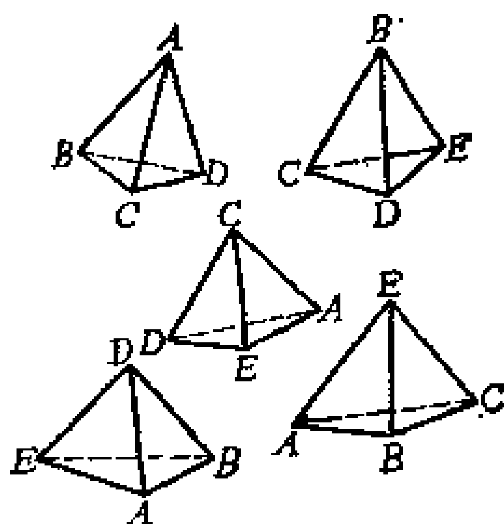


图111

三维闭曲体的分类法还有待进一步的研究。庞卡莱猜测只

有一类。这是一个长期没有解决的问题。

VII 一对一的对应

把一个橡皮的图形拉长或压缩，这图形中的任何一点在拉长或压缩后仍然是一点，不会变成两点。任何不同的两点也仍然是不同的两点，不会变成一点。把原来的点和拉长或压缩后得的新点配成对，那么原来的图形的点和新得的图形的点刚好一对一地配成对。任何一点不会没有点与它配对，也不会有两点或两个以上的点和它配对。这种配对法叫做一对一的对应。我们说原有的点数和新得的点数相等，这是再自然没有的事了。

假设取一直线l，l上取一点O及一个正方向(图112)，l上的点便可用数字记下来(参看第四章第1节1款)。现在用E记所有的正整数代表的点的全体，即是1、2、3…（一直到无穷）所代表的点。现在把l上各处都拉长一倍，把O点固定，于是1点拉到2点去，2点拉到4点去，…用E'记2、4、…（一直到无穷）所代表的点。照上面的定义，E和E'可以有一对一的对应，而且E和E'的点数相等。因为E包括1，2，3，4，5，6，…等点，而E'也只包括2，4，6，…等点，所以E'只是E的一部分，我们得到一个奇怪的结论：

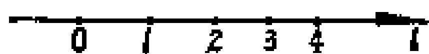


图112

E内可以找到一部分E'的点数和E的全部分的点数相等。

这个结论并不算太奇怪。有这种性质的点集叫做无穷点集。如果一个点集S的全部分的点数不能和S的任何一部分的点数相等，S叫有限点集。平常我们所遇到的事物都是有限多的，例如人类虽然有千千万万，我们可以随便说现在至多不超过一百万

万，一百万万还是一个有限的数字。

任何二无穷点集S和S_1的点数不一定会相等。例如用S表示在l上有的正整数所代表的点的全体。用S_1表示l上所有的点，你便不可能把S和S_1的点配起来，S_1中总会有无配对的点，我们说S_1的点数大于S的点数。

点数和这个点集S的点数相等的点集叫做可数无穷集，即是说这点集中的点可以依次序1，2，3，4，…排下去，每一点都排得到。l上所有的点如要排成1，2，3，4，…的次序，总有些点排不到，这种无法排成1，2，3，4…的点集叫做不可数无穷集。

任何二不可数无穷集的点数也不一定会相等。如此推下去，可以推到无穷。

假设一平面(π)上的点用(x, y)记，一直线l上的点用z记，特别取x，y，z都是小于1、但是大于或等于零的部分，这一部分在(π)上是一个正方形，在l上是一条线段。任取这样一组(x, y)，例如：$x=0.357\cdots$（可以到无穷），$y=0.246\cdots$（可以到无穷）(图113)，作$z=0.325476\cdots$。反之，$z=0.12345\cdots$（可以到无穷），作$x=0.13\cdots$，$y=0.24\cdots$。这样任何一组(x, y)，可以作出一个z；任何一个z，可以作出一组(x, y)。z和(x,y)是一对一的对应，所以一线段上的点和一个正方形内的点相等。推而广之，我们得到一个结论：

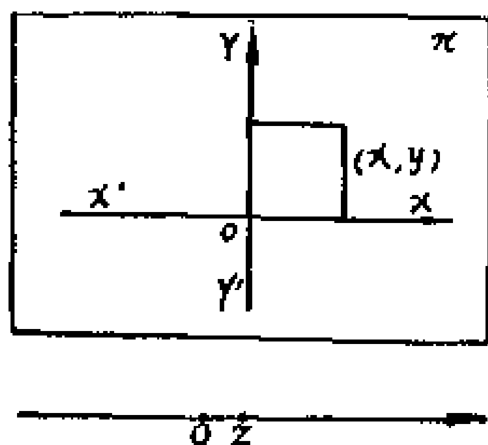


图113

定理 一平面上的点数和一直线上的点数相等，一个三度

空间里的点数和一平面上的点数相等。

这里值得特别注意的是，我们并不是说一个平面可以拉成一条直线，只说可以一一对应罢了。

VIII 一对一的连续变换群

拉长或压缩一个橡皮做的图形，但不要拉破或压破，这叫做一对一的连续变换或拓扑变换，这些变换的全体组成一群叫做一对一的连续变换群(或拓扑变换群)。在这群下研究图形的不变的性质叫做一对一的连续变换群下的几何学，或者简称为拓扑学。

IX 其他的问题

拓扑学中的问题很多，现在随便提出几个来。

1 空间的维数

我们平常都用惯了三维空间、二维空间的说法。空间的维数也是拓扑学中研究的对象，例如一张平面无论如何拉动，只要不拉破，一定拉不成一条线；一个立方体无论如何拉动，只要不拉破，一定拉不成一张平面。一般地说，直线是一维的，平面是二维的，立体是三维的。这维数不因拉动而变更，关于维数的定义以及问题的大部分都解决了。

上述这些研究并非全是只有数学兴趣的东西，在若干工程问题上有着它的应用，将这类拓扑方法用来解决无线电技术中的非线性振荡问题，这类现象例如在无线电的收发报中便是广泛出现的。拓扑方法，在无线电技术和非线性自动控制理论的

研究工作者已成为日常的数学工具。

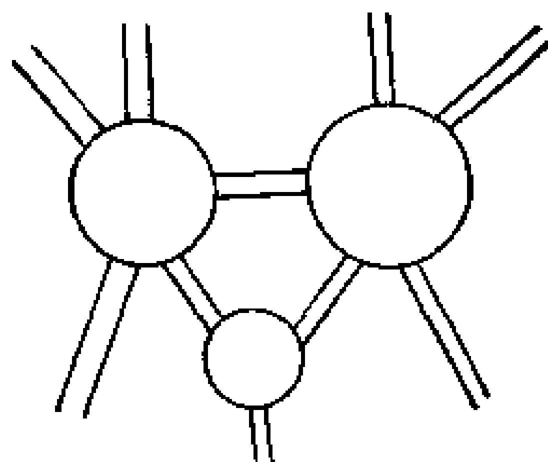


图114

2 路 径 问 题

例如一个花园(图114)，图中随便修些道路,现在要把所有的道路走完，但每条只走一次，是不是能够？这一类的问题很多。

3 绳 子 问 题

在空中任取一条橡皮绳子将它结成图115的样子,研究这橡皮绳子有些什么不因拉动而变的性质。又任取两条这样的绳子，如何可以知道由一条可以拉成另一条的样子？把几条绳子打成辫子样的东西，研究有些什么不因拉动而变的性质。这些问题还有进一步的研究。

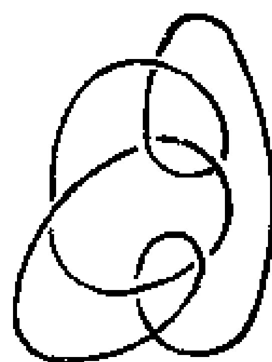


图115

4 定 点 问 题

把一个球的球心固定，把这球随便转动若干次(图116)。转

定之后，这球面上至少有两点又转回原来的位置，或者根本就没有动。这即是说经过随便多少次的任意转动之后，仍然可以找到两个点在原地，至于这两个点如何找法是另一问题，但它们的存在则毫无疑问。这种问题就叫定点问题。

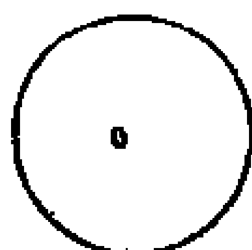


图116

此外还有很多问题，此地不能一一述及了。

在叙述了几何学这些重大发展之后，我们要谈到二十世纪的自然科学的最大成就之一的相对论，从几何学的角度来看，不仅要研究空间的性质，而且要研究时间的性质，空间和时间不可分割，这是人类认识上的一次革命性的飞跃，几何学也就从传统的空间形式研究的狭隘范围发展到空时四维有机联系的研究。这样我们便要转到空时四元几何学的介绍。

第十章　空时四元几何学

I　空时观点的发展

列宁在《唯物主义和经验批判主义》中有一段精辟的论述："世界上除了运动着的物质，什么也没有，而运动着的物质只有在时间和空间之内才能运动。人类的时空观念是相对的，但绝对真理是由这些相对的观念构成的；这些相对的观念在发展中走向绝对真理，接近绝对真理"。

这一段话给了我们多方面的启发：

第一、辩证唯物论者认为只有运动着的物质，其它的都是没有的。

第二、运动着的物质与时间和空间是联系在一起的。因此时间和空间是不可分的，它们是和运动着的物质联在一起的。

这样一来，只研究空间形式的古典几何概念便不够了，必须研究空间与时间相联系的四元几何学。这是一个观点上的发展，并且必须研究与运动着的物质相联系的空时四元几何学，而不是抽象的与物质没有关系的几何学，这又是观点上的又一重大发展。

第三、人类的时空观念是相对的，是逐步接近绝对真理的，因此，时空观念必须不断向前发展，它也果然不断向前发展，下面我们首先来看一看十九世纪以前的空时观点的发展。

II 古典的空时观点

1 我国古代的空时观点

我国古代的哲学家已有了朴素的唯物主义的观点，例如后期墨家对于空间和时间的概念已经下了比较确切的定义。《淮南·原道》中有一段话："上下四方曰宇，往古来今日宙"就是说，上下、东西、南北构成三维空间，过去、现在、未来构成一维时，"宇宙"两字联在一起，便表示空间与时间相联在一起成为一个空时四元体。

2 伽利略的空时观点

伽利略是文艺复兴后西方自然科学的始祖。他研究了运动着的系统与空时的关系。例如一条铁道上有一列火车在作等速度v前进，铁道上记录空间坐标与时间坐标用(x, t)来记，火车上记录空间坐标与时间坐标用(x^*, t^*)来记，对于这两个系统，伽利略给出了两个关系

$$x^* = x - vt, \quad t^* = t$$

前一个关系表现出两个系统（列车与铁路）有相对运动速度v的关系，后一个关系则是一个近似关系，即伽利略假定任何两个系统的时间都是相同的，也可称为"时间绝对性"假定，或"伽利略假定"，这是一个仿射变换，用图形来表示，如图(117)

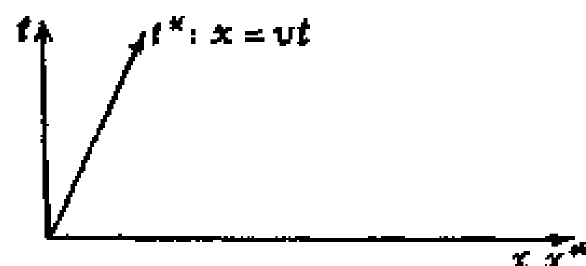


图117

这里x^*轴即$t^*=0$，由于$t^*=t$，即$t=0$，即x轴。故$t^*=t$在图上表示是x^*轴与x轴重合。另一方向$x^*\neq x$，因此，t^*轴和t轴除$t=t^*=0$一点外是分开的。具体地说t^*轴即$x^*=0$，而$x^*=x-vt$，故得到$x-vt=0$或$x=vt$。因此在(x, t)坐标图上，t^*轴的轨迹是$x=vt$。t^*轴与t轴分离。

将上两式相除，即有

$$u^*=\frac{x^*}{t^*}=\frac{x-vt}{t}=\frac{x}{t}-v=u-v$$

或$u^*=u-v$

这个关系便是日常生活中常用的概念："顺水行船，速度相加；逆水行船，速度相减。"由此得到一个重要的结论是：如果$v\neq 0$，则$u^*\neq u$，这便是$t^*=t$假定下所得到的结论。

III 爱因斯坦的狭义相对论的空时观点

1 光速不变实验导出时间相对性概念

十九世纪末期，实验得出光速不服从伽利略的速度加减规律，亦即实验得出，对于光速

$$c^*\neq c-v$$

而是很接近于$c^*=c$面对这种情况，爱因斯坦提出放弃伽利略的"时间相对性"的假定，而代之以"光速绝对性"的假定，亦称爱因斯坦假定。从几何学的观点看这是容易作到的。设$c^*=c$，取$T=ct$，$T^*=c^*t^*$则(x,t)坐标变成(X, T)坐标，光速线变成$X=T$和$X^*=T^*$（向前发射的光速）。注意到$X=T$是X轴和T轴夹角的分角线，或者反过来说：X轴和T轴对称于光速线$X=T$，同理$X^*=T^*$是X^*轴和T^*轴夹角的分角线，或者反过来说：X^*轴和T^*轴对称于光速线$X^*=T^*$，注意到光速线$X=T$和

$X^* = T^*$ 是同一条线，亦是，这个几何图形，便是下面的图118

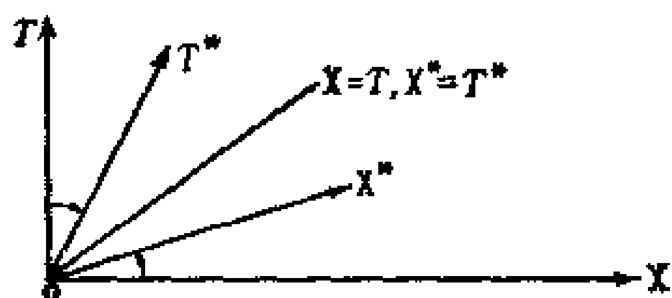


图118

亦即 $X = T$ 即 $X^* = T^*$ 是角 XOT 和 X^*OT^* 的分角线，T^* 轴偏离 T 轴，X^* 轴偏离 X 轴，偏离角一样，由此保证了分角线不变。

这样一个简单的几何学的变化，亦即 X^* 轴偏离 X 轴却带来了物理学上的空时概念的根本革命，亦即 X^* 轴与 X 轴分离，从而导致 $T^* \neq T$，或 $t^* \neq t$，这样就否决了伽利略的假定"$t^* = t$"而由爱因斯坦假定"$c^* = c$"所取代。

现在形象化地给一个例子来说明 X^* 轴偏离 X 轴的物理含义，设在列车上有三个人 A, B, C 在列车上齐唱，亦即

$$T_A^* = T_B^* = T_C^* = O。$$

设 A 在车头，B 在车中，C 在车尾，则由图119可见 $T_A > T_B > T_C$

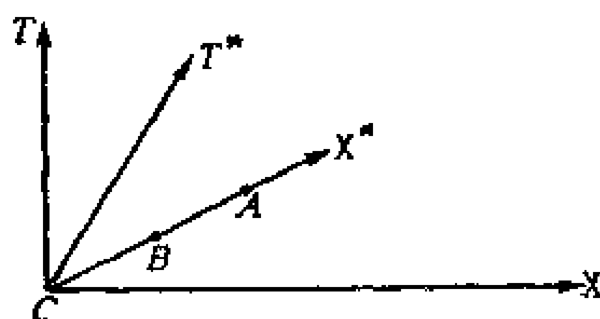


图119

亦即从铁道系统看来，这三个人不是齐唱，而是车尾的 C 先唱，车中的 B 次唱，车头的 A 最后唱。

不同系统有不同的同时性，这是对于空时观点的一次革命性的变革，是爱因斯坦的一大贡献。

2　空时距离及尺缩、钟慢

在空时平面(X,T)上两个空时点(X_1,T_1)和$(X_2,\ T_2)$的距离d有公式

$$d=\sqrt{|(T_1-T_2)^2-(X_1-X_2)^2|}.$$

它不是如第一章所说的加号的勾股定理，而是减号的勾股定理。这样一来“空时”几何使与前面讲过的“空间”几何有了本质的区别。

下面我们来讲几个根本性的区别：

尺缩　设列车从自己的系统即在$T^*=0$时的长度为OA^*，但从铁道系统即在$T=0$时量出长度为OA如图120

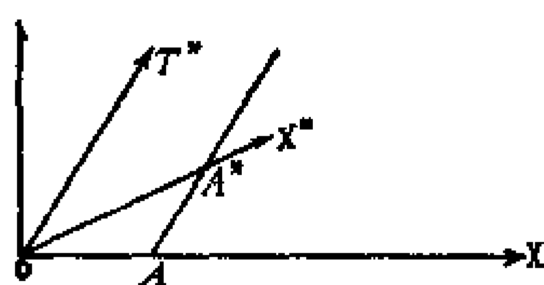


图120

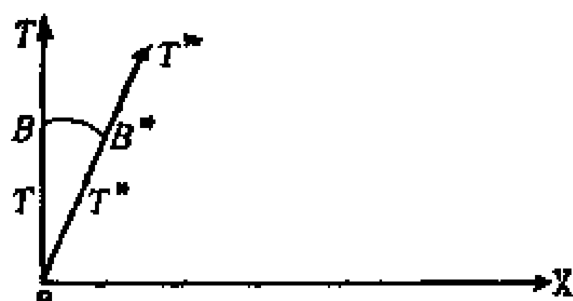


图121

应用减号的勾股定理，得到$OA=OA^*\sqrt{1-V^2}<OA^*$，$V=\frac{v}{c}$。物理意义是：“自己系统测出长度为OA^*的列车，从铁道系统测得长度为OA，并且$OA^*>OA$” 或者说：“运动着的尺子变短” 简称“尺缩”。

由此可见：同一物体，长度与测度系统有关，即与测量系统的同时性有关。空间与时间有机地融合在一起，成为空时四元体了。

钟慢　设列车上有一个表随列车运动如图121所示：

则由列车系统看，它上面的表记录了的时间为$T^*=OB^*$，由铁道系统看，所经过的时间为$T=OB$。由于

$$BB^*=vt=\left(\frac{v}{c}\right)(ct)=VT,\ V=\frac{v}{c}.$$

以及减号的勾股定理为

$$T^*=(OB)^*=\sqrt{(OB)^2-(BB^*)^2}=\sqrt{T^2-(VT)^2}$$
$$=T\sqrt{1-V^2}.$$

故$T^*<T$，即“运动的时钟变慢”或者简称“钟慢”，因子$\sqrt{1-V^2}$称为洛伦兹因子。这一现象已为人造卫星上的钟所证实，也为回旋加速器中的基本粒子如π介子的衰变所证实。

还有一个有趣的定理，设有三个宇宙飞船在宇宙中相互作等速运动，两两相遇，如图122从空间三角形来看有两边之和大于第三边，即

$$OA+AB>OB,$$

但是，从三个飞船上的三个钟所记录的时间则有，时间三角形二边之和小于第三边，即

$$T_1+T_2<T_3.$$

这只要考虑到空间距离是减号的勾股定理，便可以得到。

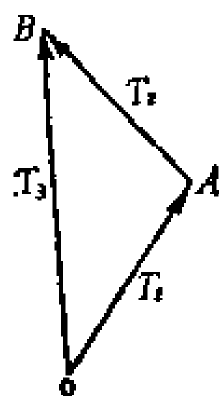


图122

注意，空间三角形没有方向问题，时间则是有方向的，不能随便写，例如$T_3+T_2<T_1$。必须顺时间发展方向接下去。

钟慢效应为宇宙航行飞向千百万光年远处的恒星的可能性提供了理论根据。

3 洛伦兹变换

前面已经看到不同系统的钟和尺的读数都差一个洛伦兹因

子$\sqrt{1-V^2}$，因此，伽利略的公式$x^* = x - vt = X - VT$，也差一个因子，即得到

$$X^* = \frac{X - VT}{\sqrt{1-V^2}}.$$

由于图118的对称性，立即可得对称公式

$$T^* = \frac{T - VX}{\sqrt{1-V^2}}.$$

这两式合并便决定了(X^*, T^*)和(X, T)之间的变换关系，这称为洛伦兹变换

特别对于光速线$\frac{X}{T} = 1$，则

$$X^*/T^* = (X - VT)/(T - VX)$$

$$= \frac{\left(\frac{X}{T} - V\right)}{\left(1 - V\frac{X}{T}\right)}$$

$$= (1 - V)/(1 - V) = 1,$$

故在(X, T)及(X^*, T^*)系统中光速都是1。这便是图118中的几何图形的代数表示。

IV 爱因斯坦的广义相对论的空时观点

1 物质的存在对空时结构的影响

物质的周围并不是真空，物质的存在使其周围产生了引力场。引力场就是物质存在的一种形式。引力场中的运动是变速的，不是等速的，所以不能直接用上节的结果，因为上节都是对等速而言的。但是正如曲线可用直线段来逼近，变速也可用

等速在局部瞬时来逼近。因此，只要决定出局部瞬时的速度，也就可以得到局部瞬时的空时结构所受到引力的影响。

以一个孤立的重质量物体例如太阳或其他恒星为例，它的引力场按牛顿万有引力的平方反比关系有引力

$$F=-G\frac{Mm}{R^2}.$$

这里G是万有引力常数，$G=6.670\times10^{-8}$厘米^3/秒克，M为重物质的质量，m为运动着的物质的质量，R为两者的距离。

令无限远处位能为零，则在R处的位能为$-G\frac{Mm}{R}$。在无限远处为静止的物体m，在引力场中下落，到R处的动能为$\frac{1}{2}mv^2$，由能量守恒关系得到动能加位能的总和不变，即

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv_\infty^2-G\frac{Mm}{R_\infty}=0.$$

因为在无限远处$v_\infty=0$，$R_\infty=\infty$由此可得在R处有

$$V^2=\left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{2MG}{c^2R}=\frac{2L}{R}.$$

此地 $L=\frac{2MG}{c^2}$是一个长度

$$1-V^2=1-\frac{2L}{R}.$$

现在在局部瞬时处，由于引力场所产生的影响相当于V所产生的影响。因此，有局部瞬时的洛伦兹因子$\sqrt{1-V^2}=\sqrt{1-\frac{2L}{R}}$.

在没有引力作用时，已知空时距离

$$d^2=(T_2-T_1)^2-(R_2-R_1)^2.$$

现在有了引力场的影响，还要加上尺缩钟慢效应，亦是要改写成

$$d^2=(1-V^2)(T_2-T_1)^2-\frac{(R_2-R_1)^2}{1-V^2},$$

但这只适用于局部瞬时，因此，还要写成微分形式

$$dS^2=(1-V^2)dT^2-\frac{dR^2}{1-V^2}.$$

将 $1-V^2=1-\frac{2L}{R}$ 代入，得到公式

$$dS^2=\left(1-\frac{2L}{R}\right)dT^2-\frac{dR^2}{1-\frac{2L}{R}}.$$

这是孤立大质量M的引力场沿径向方向的空时距离公式，特别值得注意的是这里时间dT^2和空间dR^2的系数反号，这样空时几何便呈现双曲型，它是属于第三章中所说的罗氏几何学。并且它比罗氏自称为“虚几何学”的理论还要“虚”一些。由此可见，现实常常可能超出人们所敢大胆设想的范围。罗氏几何学在天文尺度上的大质量的附近的引力场中得到实现。物质的存在通过引力场的作用，使得附近的空时产生不均匀（因随R不同而改变）的变形。这是爱因斯坦广义相对论的核心思想。由此可见，空时结构不能脱离物质的影响。

2 变形空时结构中的物理效应

还在一百年前，天才的数学家黎曼就提出了研究弯曲的空间的性质的几何学。原来，高斯已经研究了三维空间中的二维曲面的几何学（见第六章第Ⅲ节）并且引入了高斯曲率来刻划曲面的弯曲情形。黎曼更进一步，研究多维空间的弯曲程度，

他引入了刻划多维空间的弯曲程度的黎曼曲率张量，在黎曼的教授任职报告中提出了这一思想，现在已经发展成为几何学的一大分枝——黎曼几何学。在那次报告时，在座的只有高斯才能理解这一杰出的思想的深刻意义。但是在爱因斯坦的广义相对论中，由于四维空时结构受到物质的引力场的影响而产生了变形。在这种变形的四维空时结构中，黎曼的思想成为一种必需的数学工具。现实世界比黎曼所设想的还要更进一步的复杂化，因为在黎曼的论文中，距离的平方是非负的，而在空时结构中，空时距离的平方可正可负，具体地说，时向为正，空向为负。在这样的空时结构中，相应于曲面上的最短距离——测地线的地位的是长时线（亦即因为时间三角形两边之和小于第三边之故，长时线是确定的）光线在引力场中不再走直线即空间中的短程线而是在走变形空时结构中的长时线。特别当光线掠过太阳表面时，长时线的弯曲可以加以测量。一般在日全蚀时，太阳被月球遮住，背后的恒星便可以看得见，恒星来的光线受到太阳的影响在变形了的空时结构中产生了偏转，使得从地球上的观测者得到这个恒星有一个突然移动的假象（如图123）。因此一般在日全蚀时，都要观测这一物理效应。由此可见，

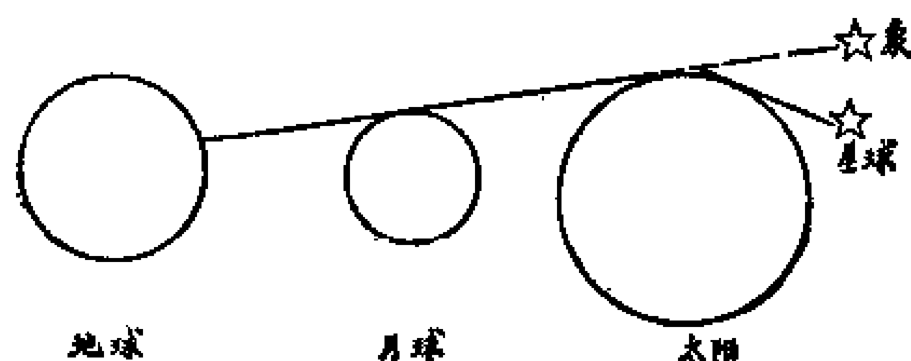


图123

在物质附近，由于引力场的作用，产生尺缩、钟慢，因而空时

结构中，一切运动都要偏离未变形的空时结构中的正常运动。光线进行的线变弯曲是一个例子，另一个例子是在未变形的空时结构中，行星绕太阳作椭圆形轨道的运动，在太阳系附近的已变了形的空时结构中，这个椭圆便不再封闭而其近日点是向前推移的，即所谓行星轨道近日点的进动。其他例子不再多举了。

V 简短的小结

二十世纪科学的一大革命是爱因斯坦的相对论对于空时概念的改变与发展，空间与时间不再能分离。几何学由三维空间的几何发展为四维空时的几何，由空无一物的平直的空间结构发展为有物质的引力影响的变形的空时结构，这种结构比罗氏的“虚几何学”还要“虚”，比黎曼几何的结构还要复杂。科学家的天才的想象力超过了他们所处的时代的科学发展的水平，但是，对物理世界的更深入的研究反过来又超过科学家的天才想象力所能设想的概念。这就是自然科学发展的辩证法。因此，深入实际、大胆创新这是几何学发展的必然的道路。

对本章详细内容与推导有兴趣的读者，可以参看作者的《空间、时间和运动着的物质》一书（1979年贵州人民出版社出版）。